

Gleichmäßige Approximation mit zweidimensionalen Splinefunktionen

Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg
zur Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Manfred Sommer
aus Nürnberg

Gleichmäßige Approximation mit zweidimensionalen Splinefunktionen

**Den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
der Friedrich-Alexander-Universität
Erlangen-Nürnberg
zur Erlangung des Doktorgrades**



**vorgelegt von
Manfred Sommer
aus Nürnberg**

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissenschaft-
lichen Fachbereichen der Universität Erlangen-Nürnberg



Tag der mündlichen Prüfung: 14.5.1975

Vorsitzender der Promotionskommission: Prof. Dr. H. Behrens

Erstberichterstatte: Prof. Dr. G. Meinardus

Zweitberichterstatte: Prof. Dr. L. Elsner

INHALTSVERZEICHNIS

Einleitung	1
§ 1 Hinreichende Kriterien für Minimallösungen bei der Approximation von stetigen Funktionen auf Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ durch Funktionen, die sich als Tensorprodukte von Elementen aus schwachen Markoff-Systemen darstellen lassen	9
§ 2 Alternanteneigenschaften bei der Approximation von Funktionen durch Funktionen aus $V_{k,1}$ auf halbdiskreten Mengen	36
§ 3 Alternanteneigenschaften bei der Approximation von reellen Funktionen in 2 Variablen durch reelle Splines in 2 Variablen	44
§ 4 Anwendungen auf spezielle Funktionen und Beispiele	83
§ 5 Notwendige Bedingungen bei der Approximation durch Splines aus $V_{k,1}$ auf halbdiskreten Mengen	90
Literaturverzeichnis	115

Einleitung

Es sei $R = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und $C(R)$ der Vektorraum aller auf R stetigen reellen Funktionen. Mit der Norm der gleichmäßigen Konvergenz

$$\|f\|_R = \max_{(x,y) \in R} |f(x,y)|$$

versehen ist $C(R)$ ein Banach-Raum. Gesucht werden zu einem $f \in C(R)$ alle Funktionen $\tilde{s}$ aus dem Raum

$$V_{k,l} = \{s \mid s(x,y) = \sum_{\mu=0}^k \sum_{\nu=0}^l \alpha_{\mu\nu} u_{\mu}(x) v_{\nu}(y), \alpha_{kl} = 0\},$$

$u_{\mu} \in C[\alpha, \beta]$, $v_{\nu} \in C[\gamma, \delta]$ für $\mu = 0, \dots, k$, $\nu = 0, \dots, l$, mit der Eigenschaft

$$\|f - \tilde{s}\|_R \leq \|f - s\|_R$$

für alle $s \in V_{k,l}$. Die Funktionen $\{u_{\mu}(x)\}_{\mu=0, \dots, k}$ und $\{v_{\nu}(y)\}_{\nu=0, \dots, l}$ sind als Anfangsstücke von zwei schwachen Markoff-Systemen M_1 und M_2 gewählt.

Um die Minimallösungen $\tilde{s}$ für f bzgl. $V_{k,l}$ zu charakterisieren, werden wir Markoff-Systeme $M_{1,t}$ und $M_{2,t}$, die von einem Parameter $t > 0$ abhängig sind, konstruieren, deren Elemente aus $C[\alpha, \beta]$ bzw. aus $C[\gamma, \delta]$ folgende Bedingung erfüllen:

Zu jedem $u \in M_1$ existiert eine Familie $\{u(\cdot, t)\}_{t > 0}$ mit $\|u(x, t) - u(x)\|_{[\alpha, \beta]} = o(1)$ für $t \rightarrow 0$,
 $u(\cdot, t) \in M_{1,t}$ für $t > 0$,

und zu jedem $v \in M_2$ existiert eine Familie $\{v(\cdot, t)\}_{t > 0}$ mit $\|v(x, t) - v(x)\|_{[y, \delta]} = o(1)$ für $t \rightarrow 0$,
 $v(\cdot, t) \in M_{2,t}$ für $t > 0$, wobei $\|\cdot\|$ die Norm der gleichmäßigen Konvergenz auf den angegebenen Intervallen bezeichnet.

Nun bilden wir für jedes $t > 0$ die Menge

$$V_{k,1;t} := \{s \mid s(x, y, t) = \sum_{\mu=0}^k \sum_{\nu=0}^1 \alpha_{\mu\nu} u_{\mu}(x, t) v_{\nu}(y, t), \alpha_{k,1} = 0\}$$

und approximieren f durch Elemente aus $V_{k,1;t}$.

Dieses Problem wurde von EHLICH, HAUSSMANN [5] und HAUSSMANN [8] untersucht. EHLICH, HAUSSMANN führen Punktegitter mit $(k+1)(l+1)$ Punkten in R ein und zeigen, daß das Vorliegen von Alternanteneigenschaften auf solchen Gittern für $f - s$ mit $s \in V_{k,1;t}$ eine hinreichende Bedingung dafür ergibt, daß s eindeutige Minimallösung für f bzgl $V_{k,1;t}$ ist (Satz 1.7). In unserer Arbeit untersuchen wir, welche Aussagen, die bei der Approximation von f durch Elemente aus $V_{k,1;t}$ gültig sind, beim Übergang (für $t \rightarrow 0$) zu $V_{k,1}$ erhalten bleiben und welche Aussagen sich abschwächen. Dies entspricht einer Idee von BARRAR, LOEB [1], die dies bei der Approximation durch Splines auf reellen Intervallen behandeln. So stellt die Existenz eines Alternantengitters (sh. Definition 1.6) für $f - s$ mit $s \in V_{k,1}$ eine hinreichende Bedingung dafür dar, daß s Minimallösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf R ist. Dabei erweist sich Hilfs-

satz 1.13 als nützlich, der eine Eigenschaft von Funktionen aus $V_{k,1}$, die aus einer stärkeren Eigenschaft von Funktionen aus $V_{k,1;t}$ abgeleitet wird, liefert. Allerdings ist durch die Existenz eines Alternantengitters die Eindeutigkeit einer Minimallösung im allgemeinen nicht erfüllt. Zuvor beweisen wir in den Sätzen 1.8, 1.10 und 1.11, daß die Existenz von Alternantengittern und Alternanten auf achsenparallelen Geraden für Funktionen $f - s_{t_1}$ mit $s_{t_1} \in V_{k,1;t_1}$ und $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i = 0$ auf R stets gewährleistet, daß es eine Minimallösung s_0 für f bzgl $V_{k,1}$ auf R gibt, so daß $f - s_0$ ebenfalls ein Alternantengitter oder eine Alternante auf einer achsenparallelen Geraden besitzt. In Satz 1.17 bringen wir eine Abschätzung der Minimalabweichung analog dem Satz von DE LA VALLEE POUSSIN für Polynome.

In § 2 untersuchen wir die gestellte Approximationsaufgabe auf halbdiskreten Teilmengen T des R^2 , weil man hier bei der Approximation von f durch Elemente aus $V_{k,1;t}$ auch notwendige Bedingungen für Minimallösungen erhält. EHLICH, HAUSSMANN [5] zeigen, daß es für $f - s$, wenn $s \in V_{k,1;t}$ Minimallösung für f bzgl $V_{k,1;t}$ auf T ist, entweder ein Alternantengitter oder eine achsenparallele Alternante in T gibt (Satz 2.1). Beim Übergang zu $V_{k,1}$ geht die für jede Minimallösung gültige notwendige Bedingung verloren. Es läßt sich nur die Existenz einer

Minimallösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf T mit einer der beiden eben genannten Alternantenbedingungen zeigen (Satz 2.2). Außerdem beweisen wir in Satz 2.5, daß jede Minimallösung s für f bzgl $V_{k,1}$, sofern in M_1 bzw in M_2 Anfangsstücke existieren, die die HAARSche Bedingung erfüllen, folgende Eigenschaft gewährleistet: Falls $f - s$ nur auf einer bestimmten Zahl von achsenparallelen Geraden in T Extrempunkte besitzt, gibt es für $f - s$ entweder eine Alternante auf einer solchen Geraden oder ein Alternantengitter in T .

In § 3 führen wir spezielle schwache Markoff-Systeme M_1 und M_2 ein. M_1 und M_2 enthalten nun als Elemente B-Splines, die zu einer unendlichen mehrfachen Knotenverteilung in $\mathbb{R}$ gebildet werden. Nach Hilfssatz 3.5 bilden die so eingeführten B-Splines ein schwaches Markoff-System. Zu M_1 und M_2 lassen sich mit Hilfe des GAUSSschen Kerns (KARLIN [9]) von einem Parameter $t > 0$ abhängige Markoff-Systeme $M_{1,t}$ und $M_{2,t}$ mit den Eigenschaften konstruieren, die in § 1 gefordert werden. Insbesondere können nun alle Ergebnisse aus § 1 und § 2 übertragen werden.

Aufgrund des speziellen Charakters der B-Splines lassen sich weitergehende Aussagen machen. In Satz 3.17 zeigen wir, daß das Vorliegen eines Alternantengitters für $f - s$ mit $s \in V_{k,1}$ mit weniger als den in § 1 nötigen

Punkten in einer Teilmenge von R garantiert, daß s Minimallösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf R ist. Schließlich untersuchen wir, wann eine Minimallösung $s \in V_{k,1}$ für f bzgl $V_{k,1}$ auf R eindeutig ist. Dazu müssen die Punkte eines für $f - s$ existierenden Alternantengitters in geeigneter Weise in Bezug auf die Lage der Knoten gegeben sein (Hilfssatz 3.19, Satz 3.20). Für Hilfssatz 3.19 verallgemeinern wir zunächst eine abgeschwächte "Interpolationseigenschaft" für B-Splines (KARLIN [9]). KARLIN zeigt, daß man genau einen Spline erhält, der an einer Reihe von verschiedenen Punkten vorgegebene Werte annimmt, wenn diese Punkte in Bezug auf die Knoten bestimmte Bedingungen erfüllen (Hilfssatz 3.6, Hilfssatz 3.8). Wir untersuchen diesen Fall auch für zusammenfallende Punkte (bei Punkten, die zweimal auftreten, ist die Ableitung des gesuchten Splines an diesen Punkten vorgegeben, bei dreimal auftretenden die erste und die zweite Ableitung usw) und zeigen, daß es genau einen Spline gibt, der selbst und dessen Ableitungen an diesen Punkten die vorgegebenen Werte annehmen, sofern diese Punkte in Bezug auf die Knoten bestimmte Bedingungen erfüllen (Satz 3.9). Außerdem zeigen wir in Satz 3.23, daß ein Alternantengitter für $f - s$ mit $s \in V_{k,1}$ mit weniger als den in § 1 nötigen Punkten in einer Teilmenge von R eine hinreichende Bedingung dafür ergibt, daß s eindeutige Minimallösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf R ist, sofern die

Punkte des Gitters gewissen Einschränkungen unterliegen. Wir schwächen in Satz 3.24 die Voraussetzungen von Satz 1.17 für die Abschätzung der Minimalabweichung im Falle der zweidimensionalen Spline-Approximation ab. Schließlich zeigen wir unter Verwendung des GAUSSschen Kerns in diesem Paragraphen, daß es zu jedem schwachen Markoff-System $M \subset C[\alpha, \beta]$ eine Familie von Markoff-Systemen $M_t \subset C[\alpha, \beta]$ mit $t > 0$ gibt mit der Eigenschaft: Zu jedem $u \in M$ existiert eine Familie $\{u(\cdot, t)\}_{t > 0}$ mit $\|u(x, t) - u(x)\|_{[\gamma, \delta]} = o(1)$ für $t \rightarrow 0$; $\alpha < \gamma < \delta < \beta$, und $u(\cdot, t) \in M_t$ für $t > 0$ (Satz 3.28).

In § 4 bringen wir einige Beispiele für die Approximation von f durch Splines aus $V_{k,1}$.

In § 5 wählen wir wieder eine halbdiskrete Menge T als Definitionsbereich, wobei die achsenparallelen Strecken η_p von T gewissen Einschränkungen unterliegen. Wir beweisen unter Verwendung von 3 Hilfssätzen (5.3, 5.4, 5.5), die sich analog zu 3 Hilfssätzen von EHLICH, HAUSSMANN [5] herleiten lassen, und unter Verwendung von 2 Interpolations-sätzen für Splines aus $V_{k,1}$ (5.1, 5.2) in Satz 5.6, daß aus der Existenz einer Minimallösung $s_0 \in V_{k,1}$ für f bzgl. $V_{k,1}$ auf T eine der folgenden beiden Bedingungen folgt: Entweder besitzt $f - s_0$ eine Alternante mit $m + 1$ Punkten auf einer achsenparallelen Strecke von T oder es gibt

zu $f - s_0$ ein Alternantengitter mit $m(\tilde{n}+1)$ Punkten in T (dabei ist $m - 1$ der Grad der B-Splines bzgl der Knotenverteilung in x -Richtung und $\tilde{n} + 1$ die Anzahl der η_p).

Auch aus der Eindeutigkeit einer Minimallösung s_0 für f bzgl $V_{k,1}$ auf T folgt eine notwendige Bedingung:

Dazu wählen wir die Knoten einfach. Wir übertragen in Satz 5.9 eine notwendige Bedingung, die STRAUSS [15] für eindimensionale Splines gefunden hat. Es besitzt nämlich $f - s_0$ in achsenparallelen Teilmengen von T Alternanten bestimmter Länge. Abgeschwächt (Folgerung 5.10) bedeutet dies, daß aus der Eindeutigkeit die Existenz von Alternantengittern in Teilmengen von T mit bestimmten Mindestpunktzahlen folgt.

Die Sätze in dieser Arbeit lassen sich auch auf höherdimensionale Approximation übertragen.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. G. Meinardus, danke ich herzlich für die wissenschaftliche Unterstützung, durch die diese Arbeit sehr gefördert wurde.

Bemerkung

In der Arbeit treten häufig die Begriffe Alternante und Alternantengitter auf, ohne daß dabei angegeben ist, in welchem Bereich diese Punkte globale Extrema der zugehörigen Funktion sind. In all diesen Fällen gilt:

Die Punkte der Alternante und des Alternantengitters sind globale Extrema der zugehörigen Funktion bzgl R (in § 1, § 3, § 4)

und globale Extrema der zugehörigen Funktion bzgl T (in § 2, § 5)

§ 1. Hinreichende Kriterien für Minimallösungen bei
der Approximation von stetigen Funktionen auf
Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ durch Funktionen, die sich
als Tensorprodukte von Elementen aus schwachen
Markoff-Systemen darstellen lassen

Es sei $R = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ mit
 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ und es sei $f \in C(R)$, wobei $C(R)$ den Raum
der stetigen reellen Funktionen auf R bezeichne. Ge-
sucht wird eine Minimallösung s aus einem Raum $V_{k,1}$,
der in diesem Kapitel eingeführt wird.

1.1 Definition:

Ein geordnetes System von stetigen reellen Funk-
tionen $W = \{w_0(x), w_1(x), \dots\}$ auf $[a, b]$ heißt
ein Markoff-System, wenn die Determinante

$$W \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & m \\ x_0 & x_1 & \dots & x_m \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} w_0(x_0) & \dots & w_0(x_m) \\ \vdots & & \vdots \\ w_m(x_0) & \dots & w_m(x_m) \end{vmatrix} \quad (1.1)$$

für alle $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und alle

$a \leq x_0 < \dots < x_m \leq b$ positiv ist.

1.2 Bemerkung:

Nach Definition 1.1 ist W genau dann ein Markoff-System, wenn jedes Anfangsstück

$W_m = \{w_0(x), \dots, w_m(x)\}$ mit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Haarsche Bedingung erfüllt, wenn also jede nichttriviale Linearkombination der Elemente von W_m höchstens m verschiedene Nullstellen auf $[a, b]$ besitzt.

1.3 Definition:

W heißt ein schwaches Markoff-System, wenn für alle $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Funktionen $w_0(x), \dots, w_m(x)$ linear unabhängig sind und außerdem

$$W \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & m \\ x_0 & x_1 & \dots & x_m \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{für alle}$$

$a \leq x_0 < \dots < x_m \leq b$ ist.

Nun sei für alle $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $w_i(x) \in C^{p-1}[a, b]$, dh. $w_i(x)$ besitze $p - 1$ stetige Ableitungen auf $[a, b]$. Man erweitert den Definitionsbereich von

$$W \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & m \\ x_0 & x_1 & \dots & x_m \end{pmatrix}$$

dadurch, daß man unter den x_i Gleichheit, jedoch jeweils bei höchstens p aufeinanderfolgenden, zuläßt.

Für jede Menge gleicher x_i ersetzt man die entsprechenden Spalten in der Determinante (1.1) durch ent-

sprechende Ableitungen der Spaltenelemente. Das bedeutet mit

$$a \leq x_0 = \dots = x_q < x_{q+1} < \dots < x_m \leq b, \quad q + 1 \leq p:$$

$$W^* \begin{pmatrix} 0 & \dots & m \\ x_0 & \dots & x_m \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} w_0(x_0) & w'_0(x_0) & \dots & w_0^{(q)}(x_0) & w_0(x_{q+1}) & \dots & w_0(x_m) \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ w_m(x_0) & w'_m(x_0) & \dots & w_m^{(q)}(x_0) & w_m(x_{q+1}) & \dots & w_m(x_m) \end{vmatrix}$$

Entsprechend wird $W^* \begin{pmatrix} 0 & \dots & m \\ x_0 & \dots & x_m \end{pmatrix}$ bei anderer Kombination der x_i gebildet.

1.4 Definition:

Ein Anfangsstück $W_m = \{w_0(x), \dots, w_m(x)\}$ eines Markoff-Systems W heißt ein erweitertes Tschebyscheff-System der Ordnung p mit $1 \leq p \leq m + 1$,

wenn gilt:

a) $w_i(x) \in C^{p-1}[a, b], \quad i = 0, \dots, m$

b) $W^* \begin{pmatrix} 0 & \dots & m \\ x_0 & \dots & x_m \end{pmatrix} > 0$

mit $a \leq x_0 < \dots < x_m \leq b$, wobei höchstens p aufeinanderfolgende x_i übereinstimmen.

W_m heißt ein erweitertes vollständiges Tschebyscheff-System der Ordnung p mit $1 \leq p \leq m + 1$, wenn $\{w_0(x), \dots, w_r(x)\}$ für $r = 0, \dots, m$ ein erwei-

tertes Tschebyscheff-System der Ordnung p bilden.
 Falls $w_i(x) \in C^q[a, b]$ für $i = 0, \dots, m$ und $q \geq m$
 ist, nennt man W_m ein erweitertes vollständiges
Tschebyscheff-System.

Nun seien von einem Parameter t mit $0 < t \leq t_0$ abhän-
 gige Markoff-Systeme

$$M_{1,t} = \{u_0(x,t), u_1(x,t), \dots\} \text{ auf } [\alpha, \beta] \text{ und}$$

$$M_{2,t} = \{v_0(x,t), v_1(x,t), \dots\} \text{ auf } [\gamma, \delta]$$

mit folgender Eigenschaft gegeben:

Für alle $v \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$ konvergieren die Funktionenfamilien
 $\{u_v(x,t)\}_{t>0}$ gleichmäßig auf $[\alpha, \beta]$ für $t \rightarrow 0$ gegen Funk-
 tionen $u_v(x)$ und die Funktionenfamilien $\{v_v(x,t)\}_{t>0}$
 gleichmäßig auf $[\gamma, \delta]$ für $t \rightarrow 0$ gegen Funktionen $v_v(x)$.
 (Die Existenz von Markoff-Systemen mit dieser Eigen-
 schaft wird in §3 gezeigt).

Dann gilt für die Funktionen $u_v(x)$ und $v_v(x)$:

- a) $u_v(x) \in C[\alpha, \beta]$, $v_v(x) \in C[\gamma, \delta]$ für alle $v \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$
- b) Sofern die Funktionen $\{u_0(x), \dots, u_m(x)\}$ bzw die
 Funktionen $\{v_0(x), \dots, v_m(x)\}$ für alle $m \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$
 linear unabhängig sind, bilden die Funktionen-
 systeme

$$M_1 = \{u_0(x), u_1(x), \dots\} \text{ bzw}$$

$$M_2 = \{v_0(x), v_1(x), \dots\}$$

schwache Markoff-Systeme.

Die Aussage von b) läßt sich folgendermaßen zeigen:

$$\text{Die Funktionen } u_v(\tilde{x}, t) := \begin{cases} u_v(\tilde{x}, t) & 0 < t \leq t_0 \\ u_v(\tilde{x}) & t = 0 \end{cases}$$

$$v \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \tilde{x} \in [\alpha, \beta]$$

sind stetig in $t = 0$.

$$\text{Aus } U_t \begin{pmatrix} 0 & \dots & m \\ x_0 & \dots & x_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u_0(x_0, t) & \dots & u_0(x_m, t) \\ \vdots & & \vdots \\ u_m(x_0, t) & \dots & u_m(x_m, t) \end{vmatrix} > 0$$

für $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\alpha \leq x_0 < \dots < x_m \leq \beta$ erhält man deshalb durch Grenzübergang

$$U \begin{pmatrix} 0 & \dots & m \\ x_0 & \dots & x_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u_0(x_0) & \dots & u_0(x_m) \\ \vdots & & \vdots \\ u_m(x_0) & \dots & u_m(x_m) \end{vmatrix} \geq 0.$$

Wir suchen nun zu einem $f \in C(R)$ alle Funktionen s_0 aus der Menge

$$V_{k,1} := \{s \mid s(x, y) = \sum_{\mu=0}^k \sum_{\nu=0}^1 \alpha_{\mu\nu} u_\mu(x) v_\nu(y), \alpha_{k1} = 0\}$$

mit $\|f - s_0\|_R \leq \|f - s\|_R$ für alle $s \in V_{k,1}$, wobei $\|\cdot\|_R$ die Norm der gleichmäßigen Konvergenz bedeutet. Dabei seien die Funktionen $\{u_0(x), \dots, u_k(x)\}$ und $\{v_0(y), \dots, v_1(y)\}$ linear unabhängig.

Zur Charakterisierung dieser Minimallösungen untersuchen wir Aussagen, die von EHLICH, HAUSSMANN [5] und HAUSSMANN [8] bei der Approximation von f durch Elemente aus

$$V_{k,1;t} = \{s | s(x,y;t) = \sum_{\mu=0}^k \sum_{\nu=0}^1 \alpha_{\mu\nu} u_{\mu}(x,t) v_{\nu}(y,t), \\ \alpha_{kl} = 0 \}$$

aufgestellt wurden und prüfen nach, inwieweit sich die Aussagen beim Übergang zu $V_{k,1}$ abschwächen. Dazu benötigen wir folgende Aussage:

1.5 Hilfssatz:

Die Funktionen $\{u_{\mu}(x,t)v_{\nu}(y,t)\}_{\substack{\mu=0,\dots,k \\ \nu=0,\dots,1}}$ sind

auf R linear unabhängig für alle $0 \leq t \leq t_0$.

Beweis:

Es folgt sofort aus Bemerkung 1.2, daß sowohl

$\{u_{\mu}(x,t)\}_{\mu=0,\dots,k}$ als auch $\{v_{\nu}(y,t)\}_{\nu=0,\dots,1}$ linear unabhängig auf R sind. Nun gebe es ein

$(\mu_0, \nu_0) \in \{0, \dots, k\} \times \{0, \dots, 1\}$ mit

$$u_{\mu_0}(x,t)v_{\nu_0}(y,t) = \sum_{\mu=0}^k \sum_{\nu=0}^1 \alpha_{\mu\nu} u_{\mu}(x,t)v_{\nu}(y,t) \\ \text{mit } \alpha_{\mu_0\nu_0} = 0, \alpha_{kl} = 0.$$

Dann ist

$$0 = \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq \mu_0}}^k \left(\sum_{\nu=0}^1 \alpha_{\mu\nu} v_{\nu}(y,t) \right) u_{\mu}(x,t) +$$

$$+ \left(\sum_{v=0}^1 \alpha_{\mu_0 v} v_v(y, t) - v_{v_0}(y, t) \right) u_{\mu_0}(x, t).$$

Da die $\{u_{\mu}(x, t)\}_{\mu=0, \dots, k}$ linear unabhängig sind, gilt:

$$\sum_{v=0}^1 \alpha_{\mu_0 v} v_v(y, t) = v_{v_0}(y, t).$$

Wegen $\alpha_{\mu_0 v_0} = 0$ und der linearen Unabhängigkeit von $\{v_v(y, t)\}_{v=0, \dots, 1}$ ist dies ein Widerspruch.

EHlich, HAUSSMANN [5] und HAUSSMANN [8] haben zur Charakterisierung der Minimallösungen aus $V_{k,1;t}$ Alternantengitter folgender Art auf R eingeführt.

1.6 Definition:

Es sei $f \in C(R)$ und $s \in V_{k,1;t}$. Ein Punktegitter

W mit $(k+1)(1+1)$ Punkten folgender Gestalt

$$W = \bigcup_{v=0}^1 \{ \xi_{0v}, \dots, \xi_{kv} \} \times \{ \eta_v \} \text{ mit } \eta_{\mu} < \eta_v \text{ für } \mu < v \quad (1.2)$$

und $\xi_{\rho v} < \xi_{\sigma v}$ für $\rho < \sigma$

bzw

$$W = \bigcup_{\mu=0}^k \{ \xi_{\mu} \} \times \{ \eta_{\mu 0}, \dots, \eta_{\mu 1} \} \text{ mit } \xi_{\mu} < \xi_v \text{ für } \mu < v \quad (1.3)$$

und $\eta_{\mu \rho} < \eta_{\mu \sigma}$ für $\rho < \sigma$

heißt Alternantengitter für $f - s$, falls gilt:

$$\text{Es ist } \epsilon(-1)^{\mu+v} (f-s)(\xi_{\mu v}, \eta_v) = ||f-s||_{\mathbb{R}}$$

für $\mu = 0, \dots, k, v = 0, \dots, 1$ und $\epsilon = \pm 1$

bzw

$$\bar{\epsilon}(-1)^{\mu+v} (f-s)(\xi_{\mu}, \eta_{\mu v}) = ||f-s||_{\mathbb{R}}$$

für $\mu = 0, \dots, k, v = 0, \dots, 1$ und $\bar{\epsilon} = \pm 1$.

Nach EHLICH,HAUSSMANN erhält man eine hinreichende Bedingung für eine Minimallösung aus $V_{k,1;t}$:

1.7 Satz:

Gibt es zu einem $f \in C(R)$ und einem $s \in V_{k,1;t}$ ein Alternantengitter W der Gestalt (1.2) oder (1.3) auf R , so ist s die eindeutig bestimmte Minimallösung für f auf R bzgl $V_{k,1;t}$.

Wir wollen zunächst untersuchen, wie sich eine Minimallösung $s_0 \in V_{k,1}$ für f bzgl $V_{k,1}$ auf R charakterisieren läßt, wenn es für eine monoton fallende Nullfolge $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $t_1 \leq t_0$ zu jedem t_i ein $s_{t_i} \in V_{k,1;t_i}$ gibt, für das ein Alternantengitter W_{t_i} zu $f - s_{t_i}$ auf R existiert. Diese s_{t_i} sind nach Satz 1.7 eindeutige Minimallösungen für f bzgl $V_{k,1;t_i}$. Es läßt sich dann ein $s_0 \in V_{k,1}$ konstruieren, welches Minimal-lösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf R ist und für das entweder ein Alternantengitter zu $f - s_0$ gefunden werden kann oder für das es eine achsenparallele Strecke in R gibt, auf der die Restriktion von $f - s_0$ eine Alternante mit $k+2$ oder $l+2$ Punkten besitzt, abhängig davon, ob die Strecke zur x - oder zur y -Achse parallel ist.

1.8 Satz:

Für eine monoton fallende Nullfolge $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit $t_1 \leq t_0$ existiere zu jedem t_i ein $s_{t_i} \in V_{k,1;t_i}$ mit der Eigenschaft:

Es gibt zu $f - s_{t_i}$ ein Alternantengitter w_{t_i} der Gestalt (1.2) oder (1.3) auf R .

Dann gibt es eine Minimallösung $s_0 \in V_{k,1}$ zu f bzgl $V_{k,1}$ auf R , so daß mindestens eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i) $f - s_0$ besitzt auf R ein Alternantengitter w_0 der Gestalt (1.2) bzw der Gestalt (1.3)
- (ii) Es existiert ein $\tilde{y} \in [\gamma, \delta]$, so daß die Funktion $(f - s_0)(\cdot, \tilde{y})$ eine Alternante mit mindestens $k+2$ Punkten $\alpha \leq \xi_0 < \dots < \xi_{k+1} \leq \beta$ besitzt bzw es existiert ein $\tilde{x} \in [\alpha, \beta]$, so daß $(f - s_0)(\tilde{x}, \cdot)$ eine Alternante mit mindestens $l+2$ Punkten $\gamma \leq \eta_0 < \dots < \eta_{l+1} \leq \delta$ besitzt.

Beweis:

Nach Voraussetzung existiert zu jedem $i \in \mathbb{N}$ ein Alternantengitter w_{t_i} für $f - s_{t_i}$ mit der Gestalt (1.2) oder (1.3). Dann existiert aber eine konvergente Teilfolge $(\tilde{t}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$, so daß die Alternantengitter $w_{\tilde{t}_i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ nur die Gestalt (1.2) bzw für alle $i \in \mathbb{N}$ nur die Gestalt

(1.3) besitzen.

oBdA seien alle $W_{\tilde{t}_1}$ von der Gestalt (1.2), dh.

$$W_{\tilde{t}_1} = \bigcup_{v=0}^1 \{ \xi_{0v}(\tilde{t}_1), \dots, \xi_{kv}(\tilde{t}_1) \} \times \{ \eta_v(\tilde{t}_1) \} \text{ mit} \\ \eta_\mu(\tilde{t}_1) < \eta_\nu(\tilde{t}_1) \text{ f\"ur } \mu < \nu \text{ und } \xi_{\rho\nu}(\tilde{t}_1) < \xi_{\sigma\nu}(\tilde{t}_1) \text{ f\"ur } \rho < \sigma.$$

Im Beweis beschränken wir uns auf diese Teilfolge $(\tilde{t}_1)_{i \in \mathbb{N}}$, die wir zur Vereinfachung ebenfalls mit $(t_1)_{i \in \mathbb{N}}$ bezeichnen.

Durchführung des Beweises:

a) Konstruktion eines $s_0 \in V_{k,1}$ mit $\lim_{t_1 \rightarrow 0} s_{t_1} = s_0$
bzgl der Norm der gleichmäßigen Konvergenz.

b) Wir zeigen: s_0 ist Minimallösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf R

c) Konstruktion eines "abgeschwächten" Alternantengitters W_0 für $f - s_0$ auf R der Art

$$W_0 = \bigcup_{v=0}^1 \{ \xi_{0v}, \dots, \xi_{kv} \} \times \{ \eta_v \} \text{ mit } \eta_\mu < \eta_\nu \text{ f\"ur } \mu < \nu \\ \text{und } \xi_{\rho\nu} < \xi_{\sigma\nu} \text{ f\"ur } \rho < \sigma$$

d) Konstruktion einer Alternanten zu $(f-s_0)(\cdot, \eta_{v_0})$ auf $[\alpha, \beta]$, falls für ein $v_0 \in \{0, \dots, l-1\}$
 $\eta_{v_0} = \eta_{v_0+1}$ gilt

$$a) \text{ Es sei } s_{t_1}(x, y) = \sum_{\mu=0}^k \sum_{v=0}^1 \alpha_{\mu v}(t_1) u_\mu(x, t_1) v_v(y, t_1).$$

Nach Satz 1.1 ist s_{t_1} Minimallösung zu f bzgl

$V_{k,1;t_1}$ auf R . Deshalb gilt:

$\|f - s_{t_1}\|_R \leq \|f - 0\|_R = \|f\|_R$ und damit

$\|s_{t_1}\|_R \leq 2\|f\|_R$. Wir zeigen nun, daß wegen dieser Bedingung die Folgen $(\alpha_{\mu\nu}(t_i))_{i \in \mathbb{N}}$ für alle $\mu = 0, \dots, k$ und alle $\nu = 0, \dots, l$ beschränkt sind.

Annahme: Es existiert eine Folge $(\alpha_{\mu_0\nu_0}(t_i))_{i \in \mathbb{N}}$

mit $0 < \beta(t_i) := |\alpha_{\mu_0\nu_0}(t_i)| \rightarrow \infty$ für $i \rightarrow \infty$.

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta(t_i)} \|s_{t_i}\|_R &= \left\| \sum_{\mu=0}^k \sum_{\nu=0}^l \frac{\alpha_{\mu\nu}(t_i)}{\beta(t_i)} u_\mu(x, t_i) v_\nu(y, t_i) \right\|_R \\ &\leq \frac{2\|f\|_R}{\beta(t_i)}. \end{aligned}$$

Wegen $\beta(t_i) \rightarrow \infty$ für $i \rightarrow \infty$ ist $\frac{1}{\beta(t_i)} \|s_{t_i}\|_R$

und damit $\left\| \sum_{\mu=0}^k \sum_{\nu=0}^l \frac{\alpha_{\mu\nu}(t_i)}{\beta(t_i)} u_\mu(x, t_i) v_\nu(y, t_i) \right\|_R$

eine Nullfolge.

Nach Hilfssatz 1.5 sind die $\{u_\mu(x, t) v_\nu(y, t)\}_{\substack{\mu=0, \dots, k \\ \nu=0, \dots, l}}$

für alle $0 < t \leq t_0$ linear unabhängig. Deshalb

folgt für alle $\mu \in \{0, \dots, k\}$ und alle $\nu \in \{0, \dots, l\}$:

$$\frac{\alpha_{\mu\nu}(t_i)}{\beta(t_i)} \rightarrow 0 \text{ für } i \rightarrow \infty.$$

Wegen $\frac{|\alpha_{\mu_0\nu_0}(t_i)|}{\beta(t_i)} = 1$ erhält man einen Widerspruch.

Deshalb existiert eine reelle, positive Zahl c mit

$$|\alpha_{\mu\nu}(t_1)| \leq c \text{ für } \mu = 0, \dots, k, \nu = 0, \dots, l.$$

Damit existiert eine gegen Null konvergente Teilfolge von $(t_1)_{i \in \mathbb{N}}$ - die wir ebenfalls mit $(t_1)_{i \in \mathbb{N}}$ bezeichnen - mit

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_{\mu\nu}(t_1) = \alpha_{\mu\nu}(0) = : \alpha_{\mu\nu} \text{ für } \mu = 0, \dots, k$$

und $\nu = 0, \dots, l$.

Für diese Folge $(t_1)_{i \in \mathbb{N}}$ gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{i \rightarrow \infty} s_{t_1}(x, y) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{\mu=0}^k \sum_{\nu=0}^l \alpha_{\mu\nu}(t_1) u_{\mu}(x, t_1) v_{\nu}(y, t_1) \\ &= \sum_{\mu=0}^k \sum_{\nu=0}^l \lim_{i \rightarrow \infty} (\alpha_{\mu\nu}(t_1) u_{\mu}(x, t_1) v_{\nu}(y, t_1)) \\ &= \sum_{\mu=0}^k \sum_{\nu=0}^l \lim_{i \rightarrow \infty} \alpha_{\mu\nu}(t_1) \lim_{i \rightarrow \infty} u_{\mu}(x, t_1) \lim_{i \rightarrow \infty} v_{\nu}(y, t_1) \\ &= \sum_{\mu=0}^k \sum_{\nu=0}^l \alpha_{\mu\nu} u_{\mu}(x) v_{\nu}(y) \\ &= : s_0(x, y). \end{aligned}$$

s_0 ist ein Element von $V_{k,l}$ und wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $u_{\mu}(x, t) \rightarrow u_{\mu}(x)$ und von $v_{\nu}(y, t) \rightarrow v_{\nu}(y)$ für $t \rightarrow 0$ konvergieren die Funktionen $(s_{t_1})_{i \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen s_0 .

b) Annahme: Es existiert ein $s_1 \in V_{k,l}$ mit

$$\|f - s_1\|_R < \|f - s_0\|_R.$$

Es sei $\delta := ||f-s_0||_R - ||f-s_1||_R$ und

$s_1(x,y) = \sum_{\mu=0}^k \sum_{v=0}^l \tilde{\alpha}_{\mu v} u_{\mu}(x) v_v(y)$. Außerdem sei

durch $s_1(x,y;t_1) = \sum_{\mu=0}^k \sum_{v=0}^l \tilde{\alpha}_{\mu v} u_{\mu}(x,t_1) v_v(y,t_1)$

für alle $i \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen aus

$V_{k,l;t_1}$ gegeben, die für $t \rightarrow 0$ gleichmäßig

gegen $s_1(x,y)$ konvergiert. Dann gilt:

$$||f(x,y)-s_1(x,y;t_1)||_R - ||f(x,y)-s_1(x,y)||_R \leq \\ \leq ||s_1(x,y;t_1)-s_1(x,y)||_R.$$

Deshalb existiert ein $i_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$||f(x,y)-s_1(x,y;t_1)||_R - ||f(x,y)-s_1(x,y)||_R < \frac{\delta}{4}$$

und

$$||f(x,y)-s_{t_1}(x,y)||_R - ||f(x,y)-s_0(x,y)||_R \leq$$

$$\leq ||s_{t_1}(x,y)-s_0(x,y)||_R < \frac{\delta}{4} \text{ für alle } i > i_0.$$

Dies ergibt wegen

$$||f(x,y)-s_{t_1}(x,y)||_R - ||f(x,y)-s(x,y;t_1)||_R > \frac{\delta}{2} > 0$$

einen Widerspruch zur Minimalität von $||f-s_{t_1}||_R$ bzgl $V_{k,l;t_1}$.

c) Wir beschränken uns auf die in a) gefundene Teil-

folge $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$, für die $\lim_{i \rightarrow \infty} s_{t_i} = s_0$ gilt.

Wir fassen die W_{t_i} -Gitterpunkte als Folgeenele-

mente aus den $(k+1)(l+1)$ Folgen

$$\{(\xi_{\mu\nu}(t_i), \eta_\nu(t_i))\}_{i \in \mathbb{N}}, \mu = 0, \dots, k, \nu = 0, \dots, l$$

auf. Da die Folgeelemente $(\xi_{\mu\nu}(t_i), \eta_\nu(t_i))$ für alle $\mu = 0, \dots, k$ und alle $\nu = 0, \dots, l$ in dem Rechteck R liegen, sind die Folgen beschränkt.

Damit existiert eine Teilfolge $(\tilde{t}_i)_{i \in \mathbb{N}}$, so daß alle $(k+1)(l+1)$ Teilfolgen konvergent sind, dh. es existieren $(k+1)(l+1)$ Elemente $(\xi_{\mu\nu}, \eta_\nu)$ aus R mit der Eigenschaft:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (\xi_{\mu\nu}(\tilde{t}_i), \eta_\nu(\tilde{t}_i)) = (\xi_{\mu\nu}, \eta_\nu), \mu = 0, \dots, k \\ \nu = 0, \dots, l$$

Für diese Grenzwerte gilt wegen

$$\alpha \leq \xi_{0\nu}(\tilde{t}_i) < \xi_{1\nu}(\tilde{t}_i) < \dots < \xi_{k\nu}(\tilde{t}_i) \leq \beta \text{ für } \nu = 0, \dots, l$$

und wegen

$$\gamma \leq \eta_0(\tilde{t}_i) < \eta_1(\tilde{t}_i) < \dots < \eta_l(\tilde{t}_i) \leq \delta$$

zunächst

$$\alpha \leq \xi_{0\nu} \leq \xi_{1\nu} \leq \dots \leq \xi_{k\nu} \leq \beta$$

und

$$\gamma \leq \eta_0 \leq \eta_1 \leq \dots \leq \eta_l \leq \delta.$$

Um für alle $\nu = 0, \dots, l$ $\xi_{0\nu} < \xi_{1\nu} < \dots < \xi_{k\nu}$ zu zeigen, gebe man ein beliebiges Paar (μ, ν) vor. Dann existiert eine weitere Teilfolge von $(\tilde{t}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ - die wir wiederum zur Vereinfachung mit $(\tilde{t}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ bezeichnen - und es gibt ein $\epsilon = \pm 1$, so daß für

alle $i \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f(\xi_{\mu\nu}(\tilde{\xi}_1), \eta_\nu(\tilde{\xi}_1)) - s_{\tilde{\xi}_1}(\xi_{\mu\nu}(\tilde{\xi}_1), \eta_\nu(\tilde{\xi}_1)) = \epsilon ||f - s_{\tilde{\xi}_1}||_R$$

und damit

$$\begin{aligned} f(\xi_{\mu+1,\nu}(\tilde{\xi}_1), \eta_\nu(\tilde{\xi}_1)) - s_{\tilde{\xi}_1}(\xi_{\mu+1,\nu}(\tilde{\xi}_1), \eta_\nu(\tilde{\xi}_1)) &= \\ &= -\epsilon ||f - s_{\tilde{\xi}_1}||_R \end{aligned}$$

oBdA sei $\epsilon = 1$. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} ||f - s_o||_R &= \lim_{i \rightarrow \infty} ||f - s_{\tilde{\xi}_1}||_R \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \{f(\xi_{\mu\nu}(\tilde{\xi}_1), \eta_\nu(\tilde{\xi}_1)) - s_{\tilde{\xi}_1}(\xi_{\mu\nu}(\tilde{\xi}_1), \eta_\nu(\tilde{\xi}_1))\} \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \{f(\xi_{\mu\nu}(\tilde{\xi}_1), \eta_\nu(\tilde{\xi}_1)) - s_o(\xi_{\mu\nu}(\tilde{\xi}_1), \eta_\nu(\tilde{\xi}_1))\} \\ &\quad + \lim_{i \rightarrow \infty} \{s_o(\xi_{\mu\nu}(\tilde{\xi}_1), \eta_\nu(\tilde{\xi}_1)) - s_{\tilde{\xi}_1}(\xi_{\mu\nu}(\tilde{\xi}_1), \eta_\nu(\tilde{\xi}_1))\} \\ &= f(\xi_{\mu\nu}, \eta_\nu) - s_o(\xi_{\mu\nu}, \eta_\nu) \end{aligned}$$

und genauso

$$\begin{aligned} -||f - s_o||_R &= -\lim_{i \rightarrow \infty} ||f - s_{\tilde{\xi}_1}||_R \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \{f(\xi_{\mu+1,\nu}(\tilde{\xi}_1), \eta_\nu(\tilde{\xi}_1)) - s_{\tilde{\xi}_1}(\xi_{\mu+1,\nu}(\tilde{\xi}_1), \eta_\nu(\tilde{\xi}_1))\} \\ &= f(\xi_{\mu+1,\nu}, \eta_\nu) - s_o(\xi_{\mu+1,\nu}, \eta_\nu). \end{aligned}$$

Deshalb erhält man:

$$\begin{aligned} \tilde{\epsilon}(-1)^{\mu+\nu} (f(\xi_{\mu\nu}, \eta_\nu) - s_o(\xi_{\mu\nu}, \eta_\nu)) &= ||f - s_o||_R \\ \text{mit } \tilde{\epsilon} &= \underline{+1}, \mu = 0, \dots, k \text{ und } \nu = 0, \dots, l \end{aligned}$$

- d) Falls für alle $\nu = 0, \dots, l-1$ $\eta_\nu < \eta_{\nu+1}$ gilt, haben wir die Existenz eines Alternantengitters zu $f - s_o$ auf R , wie es verlangt wird, nachge-

wiesen. Im anderen Fall existiert ein $v_0 \in \{0, \dots, l-1\}$

mit $\eta_{v_0} = \eta_{v_0+1}$. Dies bedeutet

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \eta_{v_0}(\xi_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} \eta_{v_0+1}(\xi_i) = \eta_{v_0}.$$

Auf $[\alpha, \beta]$ besitzt also $(f-s_0)(\cdot, \eta_{v_0})$ sowohl eine Alternante in den Punkten

$$\xi_{\mu v_0} = \lim_{i \rightarrow \infty} \xi_{\mu v_0}(\xi_i), \mu = 0, \dots, k$$

als auch in den Punkten

$$\xi_{\mu, v_0+1} = \lim_{i \rightarrow \infty} \xi_{\mu, v_0+1}(\xi_i), \mu = 0, \dots, k. \text{ Wegen}$$

$$\tilde{\varepsilon}(-1)^{\mu+v} (f(\xi_{\mu v}, \eta_v) - s_0(\xi_{\mu v}, \eta_v)) = \|f - s_0\|_R$$

mit $\tilde{\varepsilon} = \pm 1$, $\mu = 0, \dots, k$, $v = 0, \dots, l$ gilt:

$$\tilde{\varepsilon}(-1)^{\mu+v_0} (f(\xi_{\mu v_0}, \eta_{v_0}) - s_0(\xi_{\mu v_0}, \eta_{v_0})) = \|f - s_0\|_R$$

und

$$\begin{aligned} -\tilde{\varepsilon}(-1)^{\mu+v_0} (f(\xi_{\mu, v_0+1}, \eta_{v_0}) - s_0(\xi_{\mu, v_0+1}, \eta_{v_0})) &= \\ &= \|f - s_0\|_R \end{aligned}$$

Deshalb ist $\xi_{\mu v_0} \neq \xi_{\mu, v_0+1}$, $\mu = 0, \dots, k$.

Wir unterscheiden nun folgende Fälle:

1. Fall: Es existiert ein $\mu_0 \in \{0, \dots, k\}$ mit

$$\xi_{\mu_0 v_0} < \xi_{\mu_0, v_0+1}$$

Dann besitzt aber $(f-s_0)(\cdot, \eta_{v_0})$ für $\mu_0 \geq 1$ in

$$\xi_{0 v_0} < \dots < \xi_{\mu_0 v_0} < \xi_{\mu_0, v_0+1} < \dots < \xi_{k, v_0+1}$$

eine Alternante mit $k+2$ Punkten und für $\mu_0 = 0$ in

$$\xi_{0, \nu_0} < \xi_{0, \nu_0+1} < \dots < \xi_{k, \nu_0+1}$$

eine Alternante mit $k+2$ Punkten.

2. Fall: Es gilt $\xi_{\mu, \nu_0} > \xi_{\mu, \nu_0+1}$ für alle μ

Dann ist $\xi_{0, \nu_0+1} < \dots < \xi_{k, \nu_0+1} < \xi_{k, \nu_0}$ eine Alternante von $(f-s_0)(\cdot, \eta_{\nu_0})$ mit $k+2$ Punkten.

1.9 Bemerkung:

Die in Satz 1.8 konstruierte Funktion aus $V_{k,1}$ ist im allgemeinen nicht die einzige Minimallösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf R . Wir werden später für spezielle schwache Markoff-Systeme die Eindeutigkeit von s_0 in Abhängigkeit von der Lage des Alternantengitters in R untersuchen.

In Satz 1.8 wurde unter Verwendung der Minimallösungen $s_{t_1} \in V_{k,1}; t_1$ zu f auf R gezeigt, daß s_0 Minimallösung zu f bzgl $V_{k,1}$ auf R ist. Die Existenz eines Alternantengitters der Art (1.2) bzw der Art (1.3) von $f - s_0$ auf R oder die Existenz einer Alternanten von $(f-s_0)(\cdot, \tilde{y})$ auf $[\alpha, \beta]$ bzw von $(f-s_0)(\tilde{x}, \cdot)$ auf $[\gamma, \delta]$ wurden dabei nicht benötigt. Es läßt sich jedoch zeigen, daß solche Alternanten bzw Alternantengitter hinreichende Bedingungen für Minimallösungen aus $V_{k,1}$ darstellen. Im Falle eines Alternantengitters wird dies in Satz 1.14 bewiesen.

Wir zeigen zunächst, daß das Vorliegen einer Alternanten von $(f-s_0)(\cdot, \tilde{y})$ auf $[\alpha, \beta]$ bzw das Vorliegen einer Alternanten von $(f-s_0)(\tilde{x}, \cdot)$ auf $[\gamma, \delta]$ mit $s_0 \in V_{k,1}$ eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß s_0 Minimal-
lösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf R ist.

1.10 Satz:

Zu einem $f \in C(R)$ existiere ein $s_0 \in V_{k,1}$ mit der Eigenschaft:

Es gibt $k+3$ Punkte

$\alpha \leq \xi_0 < \dots < \xi_{k+1} \leq \beta$ und $\tilde{y} \in [\gamma, \delta]$ mit

$$\epsilon (-1)^\mu (f(\xi_\mu, \tilde{y}) - s_0(\xi_\mu, \tilde{y})) = \|f - s_0\|_R \quad (1.4)$$

mit $\epsilon = \pm 1, \mu = 0, \dots, k+1$

bzw es gibt $l+3$ Punkte

$\gamma \leq \eta_0 < \dots < \eta_{l+1} \leq \delta$ und $\tilde{x} \in [\alpha, \beta]$ mit

$$\tilde{\epsilon} (-1)^\nu (f(\tilde{x}, \eta_\nu) - s_0(\tilde{x}, \eta_\nu)) = \|f - s_0\|_R \quad (1.5)$$

mit $\tilde{\epsilon} = \pm 1, \nu = 0, \dots, l+1$.

Dann ist s_0 Minimallösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf R .

Besitzt insbesondere $f - s_0$ mit $s_0 \in V_{k,1;t}$ und $0 < t \leq t_0$ eine dieser beiden Eigenschaften, so ist s_0 sogar eindeutige Minimallösung für f bzgl $V_{k,1;t}$ auf R .

Beweis:

Annahme: Es existiert ein $s \in V_{k,1}$ mit $\|f - s\|_R < \|f - s_0\|_R$
Außerdem sei (1.4) erfüllt.

Dann gilt:

$$\varepsilon(-1)^{\mu}(f-s_0)(\xi_{\mu}, \tilde{y}) = ||f-s_0||_R > \varepsilon(-1)^{\mu}(f-s)(\xi_{\mu}, \tilde{y})$$

Dies ergibt für $\mu = 0, \dots, k+1$:

$$\varepsilon(-1)^{\mu}(s-s_0)(\xi_{\mu}, \tilde{y}) > 0$$

Dann existiert aber ein t_1 mit $0 < t_1 \leq t_0$, so daß

es für alle t mit $0 < t \leq t_1$ ein $\tilde{s}_t \in V_{k,1;t}$ mit

$$\varepsilon(-1)^{\mu} \tilde{s}_t(\xi_{\mu}, \tilde{y}) > 0 \quad \text{für } \mu = 0, \dots, k+1 \text{ gibt.}$$

Wegen $\tilde{s}_t \in C(R)$ besitzt $\tilde{s}_t(\cdot, \tilde{y})$ mindestens $k+1$ ver-

schiedene Nullstellen in $[\alpha, \beta]$. Da $\tilde{s}_t(\cdot, \tilde{y})$ eine

Linearkombination von $u_0(x, t)$, . . . , $u_k(x, t)$ bil-

det und diese Funktionen einen linearen Raum der

Dimension $k+1$ aufspannen, der die Haarsche Bedin-

gung erfüllt, ist dies ein Widerspruch.

Nun sei für ein $s_0 \in V_{k,1;t}$ mit $0 < t \leq t_0$ die Eigen-

schaft (1.4) gültig. Da die Funktionen

$u_0(x, t)$, . . . , $u_k(x, t)$ die Haarsche Bedingung er-

füllen, gilt nach dem eindimensionalen Alternanten-

satz (sh. MEINARDUS [11]): Es existiert kein

$$s(x) = \sum_{\mu=0}^k \beta_{\mu} u_{\mu}(x, t) \quad \text{mit } s \neq s_0(\cdot, \tilde{y}) \quad \text{auf } [\alpha, \beta] \text{ und}$$

$$||f(x, \tilde{y}) - s(x)||_{[\alpha, \beta]} \leq ||f(x, \tilde{y}) - s_0(x, \tilde{y})||_{[\alpha, \beta]}$$

$$= ||f-s_0||_R$$

Dies gilt insbesondere nicht für

$$\beta_{\mu} = \sum_{v=0}^1 \beta_{\mu v} v_v(\tilde{y}, t), \quad \mu = 0, \dots, k, \quad \beta_{k1} = 0.$$

Deshalb ist s_0 eindeutige Minimallösung für f
bzgl $V_{k,1;t}$ auf R .

Können die Minimallösungen für f bzgl $V_{k,1;t}$ auf R
durch Alternanten der Gestalt (1.4) bzw der Gestalt
(1.5) charakterisiert werden, so läßt sich analog zu
Satz 1.8 folgendes zeigen:

1.11 Satz:

Für eine monoton fallende Nullfolge $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$ mit
 $t_1 \leq t_0$ existiere zu jedem t_1 ein $s_{t_1} \in V_{k,1;t_1}$ mit
der Eigenschaft:

Es gibt zu $f - s_{t_1}$ eine Alternante w_{t_1} bzgl R mit

$$w_{t_1} = \{\xi_0(t_1), \dots, \xi_{k+1}(t_1)\} x \{\tilde{y}(t_1)\} \quad \text{mit } \xi_\rho(t_1) < \xi_\sigma(t_1) \\ \text{für } \rho < \sigma$$

bzw

$$w_{t_1} = \{\tilde{x}(t_1)\} x \{\eta_0(t_1), \dots, \eta_{l+1}(t_1)\} \quad \text{mit } \eta_\rho(t_1) < \eta_\sigma(t_1) \\ \text{für } \rho < \sigma$$

auf R . Dann existiert ein $s_0 \in V_{k,1}$, welches Mini-
mallösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf R ist und es gibt zu
 $f - s_0$ eine Alternante w bzgl R mit

$$w = \{\xi_0, \dots, \xi_{k+1}\} x \{\tilde{y}\} \quad \text{mit } \xi_\rho < \xi_\sigma \quad \text{für } \rho < \sigma \quad \text{bzw}$$

$$w = \{\tilde{x}\} x \{\eta_0, \dots, \eta_{l+1}\} \quad \text{mit } \eta_\rho < \eta_\sigma \quad \text{für } \rho < \sigma.$$

Beweis:

Die Konstruktion von $s_0 \in V_{k,1}$ verläuft wie in
Beweisschritt a) von Satz 1.8. Die Existenz einer

Alternanten der angegebenen Form wird wie im Beweis von Satz 1.8, Teil c) gezeigt. Dann folgt aus Satz 1.10, daß s_0 Minimallösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf R ist.

Satz 1.8 und Satz 1.11 bringen nur dann Aussagen über ein Alternantenverhalten einer Fehlerfunktion bzgl $V_{k,1}$, wenn man Alternanteneigenschaften von Fehlerfunktionen bzgl $V_{k,1;t}$ voraussetzt. Wir werden aber jetzt unter Verwendung einer Eigenschaft der Funktionen aus $V_{k,1;t}$ aus der Existenz eines Alternantengitters für eine Funktion $f - s_0$ mit $s_0 \in V_{k,1}$ folgern, daß s_0 Minimallösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf R ist. Dazu benötigt man folgenden Hilfssatz von EHLICH, HAUSSMANN [5].

1.12 Hilfssatz:

Es sei W ein Punktegitter der Gestalt (1.2) bzw

(1.3) auf R . Gilt dann für ein $s \in V_{k,1;t}$

$$\varepsilon(-1)^{\mu+\nu} s(\xi_{\mu\nu}, \eta_{\mu\nu}) \geq 0, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \mu = 0, \dots, k, \quad (1.6)$$

$$\nu = 0, \dots, l$$

bzw

$$\tilde{\varepsilon}(-1)^{\mu+\nu} s(\xi_{\mu}, \eta_{\mu\nu}) \geq 0, \quad \tilde{\varepsilon} = \pm 1, \quad \mu = 0, \dots, k \quad (1.7)$$

$$\nu = 0, \dots, l,$$

so ist die Funktion s auf R gleich der Nullfunktion.

Hilfssatz 1.12 läßt sich nicht auf $V_{k,1}$ anwenden, wie Beispiel 1.16 zeigen wird. Wir werden später untersuchen,

wie das Punktegitter in R liegen muß, damit die Aussage von Hilfssatz 1.12 auch für alle $s \in V_{k,1}$ gilt. Läßt man aber in (1.6) bzw in (1.7) nur die strikte Ungleichung zu, so kann man folgendes über die Elemente von $V_{k,1}$ aussagen.

1.13 Hilfssatz:

Es sei W ein Punktegitter der Gestalt (1.2) bzw (1.3) auf R . Dann gibt es kein $s \in V_{k,1}$ mit

$$\varepsilon (-1)^{\mu+\nu} s(\xi_{\mu\nu}, \eta_{\nu}) > 0, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \mu = 0, \dots, k \quad (1.8) \\ \nu = 0, \dots, l$$

bzw

$$\tilde{\varepsilon} (-1)^{\mu+\nu} s(\xi_{\mu\nu}, \eta_{\mu\nu}) > 0, \quad \tilde{\varepsilon} = \pm 1, \quad \mu = 0, \dots, k \quad (1.9) \\ \nu = 0, \dots, l$$

Beweis:

Annahme: Es existiert ein $s \in V_{k,1}$ mit der Eigenschaft (1.8)

$$\text{Es sei } s(x,y) = \sum_{\mu=0}^k \sum_{\nu=0}^l \alpha_{\mu\nu} u_{\mu}(x) v_{\nu}(y) \quad \text{mit } \alpha_{kl} = 0.$$

Wegen (1.8) und der gleichmäßigen Konvergenz von $u_{\mu}(x,t)$ gegen $u_{\mu}(x)$ bzw von $v_{\nu}(y,t)$ gegen $v_{\nu}(y)$ für $t \rightarrow 0$ existiert ein t_1 mit $0 < t_1 \leq t_0$, so daß für alle Funktionen

$$s(x,y;t) = \sum_{\mu=0}^k \sum_{\nu=0}^l \alpha_{\mu\nu} u_{\mu}(x,t) v_{\nu}(y,t) \quad \text{mit } 0 < t \leq t_1$$

gilt:

$$\varepsilon(-1)^{\mu+\nu} s(\xi_{\mu\nu}, \eta_\nu; t) > 0, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad \mu = 0, \dots, k \\ \nu = 0, \dots, l$$

Da für $0 < t \leq t_1$ $s(x, y; t) \in V_{k,1}; t$ ist, ist dies nach Hilfssatz 1.12 ein Widerspruch.

Unter Verwendung von Hilfssatz 1.13 erhält man eine hinreichende Bedingung für eine Minimallösung aus $V_{k,1}$.

1.14 Satz:

Es sei $f \in C(R)$ und $s_0 \in V_{k,1}$. Gibt es ein Alternantengitter W der Gestalt (1.2) bzw (1.3) für $f - s_0$ auf R , so ist s_0 eine Minimallösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf R .

Beweis:

W sei von der Gestalt

$$W = \bigcup_{\nu=0}^1 \{ \xi_{0\nu}, \dots, \xi_{k\nu} \} \times \{ \eta_\nu \} \text{ mit } \eta_\mu < \eta_\nu \text{ für } \mu < \nu \\ \text{und } \xi_{\rho\nu} < \xi_{\sigma\nu} \text{ für } \rho < \sigma.$$

Falls ein $s \in V_{k,1}$ mit $||f-s||_R < ||f-s_0||_R$ existiert, gilt wegen

$$\varepsilon(-1)^{\mu+\nu} (f-s_0)(\xi_{\mu\nu}, \eta_\nu) = ||f-s_0||_R \\ \text{für } \mu = 0, \dots, k, \nu = 0, \dots, l, \varepsilon = \pm 1:$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(-1)^{\mu+\nu} (s_0-s)(\xi_{\mu\nu}, \eta_\nu) &= \varepsilon(-1)^{\mu+\nu} (s_0-f)(\xi_{\mu\nu}, \eta_\nu) \\ &\quad + \varepsilon(-1)^{\mu+\nu} (f-s)(\xi_{\mu\nu}, \eta_\nu) \\ &= -||f-s_0||_R + \varepsilon(-1)^{\mu+\nu} (f-s)(\xi_{\mu\nu}, \eta_\nu) \\ &\leq -||f-s_0||_R + ||f-s||_R < 0 \end{aligned}$$

Nach Hilfssatz 1.13 ist dies nicht möglich.

1.15 Bemerkung:

Gibt es noch eine weitere Minimallösung $s \in V_{k,1}$ für f bzgl $V_{k,1}$ auf R , so erhält man analog zum Beweis von Satz 1.14:

$$\varepsilon(-1)^{u+v} (s_0 - s) (\xi_{uv}, \eta_v) \geq 0, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad u = 0, \dots, k \\ v = 0, \dots, 1$$

Dies führt im allgemeinen nicht zu $s \equiv s_0$ auf R , wie das folgende Beispiel zeigt.

1.16 Beispiel:

Es sei $k = 2$ und $l = 0$. Es seien $u_0(x), u_1(x) \in C[a, \beta]$ mit $u_0(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, \beta]$ und

$$\left| \begin{array}{cc} u_0(x_0) & u_0(x_1) \\ u_1(x_0) & u_1(x_1) \end{array} \right| \geq 0 \text{ für alle } a \leq x_0 < x_1 \leq \beta \text{ mit der}$$

zusätzlichen Bedingung, daß mindestens 2 Punkte x_0, x_1 mit

$$\left| \begin{array}{cc} u_0(x_0) & u_0(x_1) \\ u_1(x_0) & u_1(x_1) \end{array} \right| = 0 \text{ und 2 Punkte } \tilde{x}_0, \tilde{x}_1 \text{ mit}$$

$$\left| \begin{array}{cc} u_0(\tilde{x}_0) & u_0(\tilde{x}_1) \\ u_1(\tilde{x}_0) & u_1(\tilde{x}_1) \end{array} \right| > 0 \text{ existieren.}$$

Außerdem sei $v_0(y) \in C[\gamma, \delta]$ und $v_0(y) > 0$ für alle $y \in [\gamma, \delta]$. Dann erfüllen $u_0(x), u_1(x), v_0(y)$ die Voraussetzungen dieses Paragraphen (daß es stets ein Anfangsstück $\{u_0(x, t), u_1(x, t)\}$ eines Markoff-

Systems mit $u_0(x, t) \rightarrow u_0(x)$ für $t \rightarrow 0$ und $u_1(x, t) \rightarrow u_1(x)$ für $t \rightarrow 0$ gibt, wird in einem späteren Teil der Arbeit gezeigt. Dabei wird mit einer sogenannten "Approximations-Identität" zu einem gegebenen schwachen Markoff-System ein Markoff-System konstruiert).

Dann existieren 2 Zahlen $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$, von denen mindestens eine von Null verschieden ist, mit

$$\alpha_0 u_0(x_0) + \alpha_1 u_1(x_0) = 0 \quad \text{und}$$

$$\alpha_0 u_0(x_1) + \alpha_1 u_1(x_1) = 0.$$

Nach Voraussetzung gilt dann

$$\alpha_0 u_0(\tilde{x}_0) + \alpha_1 u_1(\tilde{x}_0) \neq 0 \quad \text{oder}$$

$$\alpha_0 u_0(\tilde{x}_1) + \alpha_1 u_1(\tilde{x}_1) \neq 0.$$

Es sei $\alpha_0 u_0(\tilde{x}_0) + \alpha_1 u_1(\tilde{x}_0) \neq 0$. Dann gilt für die Funktion $s(x, y) = \alpha_0 u_0(x) v_0(y) + \alpha_1 u_1(x) v_0(y) \in V_{2,0}$:

$$\varepsilon (-1)^\mu s(\xi_\mu, \tilde{y}) \geq 0 \quad \text{mit } \tilde{y} \in [\gamma, \delta], \quad \mu = 0, 1, 2, \quad \varepsilon = \pm 1$$

und $(\xi_0, \xi_1, \xi_2) = (x_0, x_1, \tilde{x}_0)$ in monoton steigender Folge geordnet. Aber es ist $s(x, y) \neq 0$.

Der folgende Satz analog dem von DE LA VALLÉE POUSSIN für Polynome ergibt eine untere Schranke für die Minimalabweichung bzgl $v_{k,1}$.

1.17 Satz:

Zu $f \in C(R)$ und $s \in V_{k,1}$ existieren ein Punktegitter W der Gestalt (1.2) bzw der Gestalt (1.3) auf R und $(k+1)(l+1)$ reelle positive Zahlen $m_{\mu\nu}$ mit der Eigenschaft:

$$\varepsilon(-1)^{\mu+\nu}(f-s)(\xi_{\mu\nu}, \eta_{\nu}) = m_{\mu\nu}, \quad \mu = 0, \dots, k, \quad \nu = 0, \dots, l, \\ \varepsilon = \pm 1$$

bzw

$$\tilde{\varepsilon}(-1)^{\mu+\nu}(f-s)(\xi_{\mu}, \eta_{\mu\nu}) = m_{\mu\nu}, \quad \mu = 0, \dots, k, \quad \nu = 0, \dots, l, \\ \varepsilon = \pm 1.$$

Dann gilt: $\min_{\mu, \nu} m_{\mu\nu} \leq A_{k,1} \leq \|f-s\|_R$, wobei

$$A_{k,1} := \min_{s \in V_{k,1}} \|f-s\|_R \text{ ist.}$$

Beweis:

Annahme: Es existieren ein Punktegitter W der Gestalt (1.2) und ein $\tilde{s} \in V_{k,1}$ mit $\|f-\tilde{s}\|_R < \min_{\mu, \nu} m_{\mu\nu}$

Dann gilt:

$$\varepsilon(-1)^{\mu+\nu}(f-s)(\xi_{\mu\nu}, \eta_{\nu}) = m_{\mu\nu} > \|f-\tilde{s}\|_R \\ \geq \varepsilon(-1)^{\mu+\nu}(f-\tilde{s})(\xi_{\mu\nu}, \eta_{\nu})$$

Daraus folgt für $\mu = 0, \dots, k, \nu = 0, \dots, l$ und $\varepsilon = \pm 1$:

$$\varepsilon(-1)^{\mu+\nu}(\tilde{s}-s)(\xi_{\mu\nu}, \eta_{\nu}) > 0$$

Dies ist ein Widerspruch nach Hilfssatz 1.13.

1.18 Bemerkung:

Alle Sätze dieses Paragraphen bleiben für jede Teilmenge von R gültig. Denn die Beweise müssen beim Übergang zu Teilmengen von R nicht abgeändert werden.

§ 2. Alternanteneigenschaften bei der Approximation
von Funktionen durch Funktionen aus $V_{k,1}$ auf
halbdiskreten Mengen

Im vorigen Paragraphen traten bei der Behandlung des Approximationsproblems auf R nur hinreichende Bedingungen bei der Charakterisierung von Minimallösungen auf. EHLICH, HAUSSMANN [5] haben deshalb untersucht, ob es Teilmengen von R gibt (die nicht Teilmengen der reellen Achse sind), auf denen man notwendige und hinreichende Bedingungen für eine Minimallösung aus $V_{k,1;t}$ erhält. Dazu führen sie halbdiskrete Mengen T ein:

Es seien $l+1$ Zahlen η_v mit $\gamma \leq \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_l \leq \delta$ gegeben. Dann sei $T := \bigcup_{v=0}^l [\alpha, \beta] \times \{\eta_v\}$

Nach Bemerkung 1.19 lassen sich alle Sätze des vorigen Paragraphen auf T übertragen. Falls man die Zahl der η_v kleiner als $l+1$ wählt, gibt es kein Punktegitter (1.2) auf dieser neuen Teilmenge von T und eine Charakterisierung von Minimallösungen aus $V_{k,1;t}$ oder $V_{k,1}$ durch Alternantengitter dieser Gestalt ist nicht mehr möglich.

Wir werden aber in diesem Paragraphen sowohl für ein T , das aus weniger als $l+1$ Punkten η_v , als auch für ein T , das aus mehr als $l+1$ Punkten η_v entsteht, notwendige Bedingungen für Minimallösungen bzgl $V_{k,1;t}$ beweisen

und dann auf das Approximationsproblem bzgl $V_{k,1}$ übertragen. Zunächst wollen wir untersuchen, ob eine notwendige und hinreichende Bedingung für Minimallösungen aus $V_{k,1;t}$, die HAUSSMANN [8] bewiesen hat, auf $V_{k,1}$ übertragen werden kann.

HAUSSMANN beweist folgenden Satz:

2.1 Satz:

Es ist $s \in V_{k,1;t}$ mit $k \geq 1, l \geq 1$ genau dann Minimal-
lösung für $f \in C(T)$ bzgl $V_{k,1;t}$ auf T , wenn eine
der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i) Es existiert ein $\tilde{\eta} \in \{\eta_0, \dots, \eta_1\}$, so daß
(f-s) $(\cdot, \tilde{\eta})$ in $[\alpha, \beta]$ eine Alternante mit min-
destens $k+2$ Punkten besitzt
- (ii) Es gibt ein Alternantengitter W der Gestalt
(1.2) für $f - s$ in T

Beim Übergang von $V_{k,1;t}$ zu $V_{k,1}$ geht die "genau dann"-
Eigenschaft von Satz 2.1 verloren. Es läßt sich nur
die Existenz eines $s_0 \in V_{k,1}$ zeigen, welches Minimal-
lösung für $f \in C(T)$ ist und für das eine der beiden
Bedingungen (i), (ii) gilt.

2.2 Satz:

Zu $f \in C(T)$ existiert eine Minimallösung $s_0 \in V_{k,1}$ mit $k \geq 1, l \geq 1$, so daß eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i) Es existiert ein $\tilde{\eta} \in \{\eta_0, \dots, \eta_1\}$, so daß $(f-s_0)(\cdot, \tilde{\eta})$ in $[\alpha, \beta]$ eine Alternante mit mindestens $k+2$ Punkten besitzt
- (ii) Es gibt ein Alternantengitter W der Gestalt (1.2) für $f - s_0$ in T

Beweis:

Nach Satz 2.1 gibt es eine monoton fallende Nullfolge $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $t_i \leq t_0$, so daß $f - s_{t_i}$, wobei s_{t_i} eine Minimallösung für f bzgl $V_{k,1;t_i}$ auf T ist, für alle i ein Alternantengitter der Gestalt (1.2) besitzt oder es gibt eine monoton fallende Nullfolge $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $t_i \leq t_0$, mit der Eigenschaft:

Für alle i existiert ein $\eta(t_i) \in \{\eta_0, \dots, \eta_1\}$, so daß $(f-s_{t_i})(\cdot, \eta(t_i))$ (s_{t_i} sei wiederum Minimallösung für f bzgl $V_{k,1;t_i}$ auf T) in $[\alpha, \beta]$ eine Alternante mit $k+2$ Punkten besitzt.

Die Sätze 1.8 und 1.11 liefern dann das gewünschte Ergebnis.

Nun seien zu $\eta_0, \dots, \eta_1$ noch die Punkte $\eta_{1+1}, \dots, \eta_r$ mit $\eta_1 < \eta_{1+1} < \dots < \eta_r < \delta$ hinzugenommen und es sei

$T := \bigcup_{v=0}^r [\alpha, \beta] \times \{\eta_v\}$. Dann gilt:

2.3 Satz:

Es sei $s \in V_{k,1;t}$ mit $k \geq 1, l \geq 1$ Minimallösung für $f \in C(T)$ bzgl $V_{k,1;t}$ auf T . Dann ist mindestens eine der folgenden 3 Bedingungen erfüllt:

(i) $f - s$ besitzt auf mindestens $l+2$ Strecken

$[\alpha, \beta] \times \{\eta_{i_0}\}, \dots, [\alpha, \beta] \times \{\eta_{i_{l+1}}\}$ von T Extrempunkte

(ii) Es existiert ein $\tilde{\eta} \in \{\eta_0, \dots, \eta_r\}$, so daß

$(f-s)(\cdot, \tilde{\eta})$ in $[\alpha, \beta]$ eine Alternante mit mindestens $k+2$ Punkten besitzt

(iii) Es existiert in einer Teilmenge

$\tilde{T} = \bigcup_{v=0}^1 [\alpha, \beta] \times \{\eta_{i_v}\}$ von T ein Alternantengitter für $f - s$ mit $(k+1)(l+1)$ Punkten der Gestalt (1.2)

Beweis:

$f - s$ besitze auf höchstens $l+1$ Strecken

$[\alpha, \beta] \times \{\eta_{i_0}\}, \dots, [\alpha, \beta] \times \{\eta_{i_l}\}$ von T Extrempunkte.

Da s Minimallösung für f bzgl $V_{k,1;t}$ auf T ist, ist

0 Minimallösung für $f - s$ bzgl $V_{k,1;t}$ auf

$\tilde{T} = \bigcup_{v=0}^1 [\alpha, \beta] \times \{\eta_{i_v}\}$. Denn gäbe es ein $\tilde{s}(x, y) \in V_{k,1;t}$ mit $\tilde{s} \neq 0$ und $\|f-s-\tilde{s}\|_{\tilde{T}} < \|f-s\|_{\tilde{T}} = \|f-s\|_T$, so

wäre mit $0 < c < \min\left(\frac{\|f-s\|_T - \|f-s\|_{T \setminus \tilde{T}}}{\|\tilde{s}\|_T}, 1\right)$:

$$||f-s-c\tilde{s}||_{\tilde{T}} < ||f-s||_{\tilde{T}} = ||f-s||_T$$

und

$$\begin{aligned} ||f-s-c\tilde{s}||_{T \setminus \tilde{T}} &\leq ||f-s||_{T \setminus \tilde{T}} + c ||\tilde{s}||_{T \setminus \tilde{T}} \\ &< ||f-s||_{T \setminus \tilde{T}} + ||f-s||_T - ||f-s||_{T \setminus \tilde{T}} \\ &= ||f-s||_T \end{aligned}$$

Damit wäre $s + c\tilde{s} \in V_{k,1;t}$ eine bessere Approximation für f auf T bzgl $V_{k,1;t}$ als s .

Da O Minimallösung für $f - s$ bzgl $V_{k,1;t}$ auf $\tilde{T}$ ist, existiert nach Satz 2.1 entweder ein $\tilde{\eta} \in \{\eta_0, \dots, \eta_1\}$, so daß $(f-s)(\cdot, \tilde{\eta})$ in $[\alpha, \beta]$ eine Alternante mit $k+2$ Punkten besitzt, oder es gibt in $\tilde{T}$ ein Alternantengitter für $f - s$ mit $(k+1)(l+1)$ Punkten der Gestalt (1.2).

Da die Extrempunkte von $f - s$ bzgl T in $\tilde{T}$ liegen, ist der Satz bewiesen.

Falls man von den Punkten $\eta_0, \dots, \eta_1$ nur noch die Punkte $\eta_0, \dots, \eta_q$ übrigläßt und $T = \bigcup_{v=0}^q [\alpha, \beta] \times \{\eta_v\}$ setzt, erhält man:

2.4 Satz:

Ist $s \in V_{k,1;t}$ mit $k \geq 1, l \geq 1$ Minimallösung für $f \in C(T)$ bzgl $V_{k,1;t}$ auf T , so erfüllt $f - s$ mindestens eine der folgenden beiden Bedingungen:

(i) Es existiert ein $\tilde{\eta} \in \{\eta_0, \dots, \eta_q\}$, so daß

$(f-s)(\cdot, \tilde{\eta})$ in $[\alpha, \beta]$ eine Alternante mit mindestens $k+2$ Punkten besitzt

(ii) Es existiert in T ein Alternantengitter für $f - s$ mit $(k+1)(q+1)$ Punkten der Gestalt (1.2)

Beweis:

Wenn s Minimallösung für f bzgl $V_{k,1;t}$ auf T ist, so ist 0 Minimallösung für $f - s$ bzgl des Raumes

$V_{k,q;t}$ mit den Elementen

$$s(x,y) = \sum_{\mu=0}^k \sum_{\nu=0}^q \alpha_{\mu\nu} u_{\mu}(x,t) v_{\nu}(y,t), \quad \alpha_{kq} = 0$$

auf T . Satz 2.1 liefert das gewünschte Ergebnis.

Die Sätze 2.3 und 2.4 lassen sich -ähnlich wie in Satz 2.2 zu beweisen- auf $V_{k,1}$ in abgeschwächter Form übertragen.

Man erhält: Es gibt eine Minimallösung $s_0 \in V_{k,1}$ für f auf T bzgl $V_{k,1}$, so daß $f - s_0$ die Bedingungen (i),

(ii) oder (iii) von Satz 2.3 erfüllt (hier ist

$T = \bigcup_{\nu=0}^r [\alpha, \beta] \times \{\eta_{\nu}\}$) bzw es gibt eine Minimallösung $s_0 \in V_{k,1}$ für f auf T bzgl $V_{k,1}$, so daß $f - s_0$ die Bedingungen (i)

oder (ii) von Satz 2.4 erfüllt (hier ist $T = \bigcup_{\nu=0}^q [\alpha, \beta] \times \{\eta_{\nu}\}$).

Interessanter ist es, zu untersuchen, ob es Alternantengitter mit weniger als $(k+1)(l+1)$ Punkten zu jedem

$f - s_0$, $s_0 \in V_{k,1}$, s_0 ist Minimallösung für f bzgl $V_{k,1}$

auf T , gibt, wenn man in den schwachen Markoff-Systemen

M_1 und M_2 Anfangsstücke findet, die die Haarsche Bedingung erfüllen.

Es seien nun 2 natürliche Zahlen p mit $1 \leq p \leq k$ und q mit $1 \leq q \leq l$ gegeben, für die gilt:

Für alle r mit $0 \leq r \leq p$ bzw mit $0 \leq r \leq q$ erfüllen $\{u_0(x), \dots, u_r(x)\}$ bzw $\{v_0(y), \dots, v_r(y)\}$ die Haarsche Bedingung.

Dann erhält man folgenden Satz:

2.5 Satz:

Es sei $s \in V_{k,l}$ mit $k \geq 1, l \geq 1$ Minimallösung für $f \in C(T)$ bzgl $V_{k,l}$ auf $T = \bigcup_{v=0}^1 [\alpha, \beta] x(\eta_v)$. Dann ist mindestens eine der folgenden 3 Bedingungen erfüllt:

(i) $f - s$ besitzt auf mindestens $q+2$ Strecken

$[\alpha, \beta] x(\eta_{i_0}), \dots, [\alpha, \beta] x(\eta_{i_{q+1}})$ von T Extrempunkte

(ii) Es existiert ein $\tilde{\eta} \in \{\eta_0, \dots, \eta_1\}$, so daß

$(f-s)(\cdot, \tilde{\eta})$ in $[\alpha, \beta]$ eine Alternante mit $p+2$ Punkten besitzt

(iii) Es existiert in einer Teilmenge $\tilde{T}$ von T ein Alternantengitter für $f - s$ mit $(p+1)(q+1)$ Punkten

Beweis:

Falls $f - s$ nur auf $q+1$ Strecken von T Extrempunkte besitzt, zeigt man wie im Beweis von Satz 2.3, daß 0 Minimallösung für $f - s$ bzgl $V_{p,q}$ auf

$\tilde{T} = \bigcup_{v=0}^q [\alpha, \beta] \times \{\eta_{1_v}\}$ ist. Dann existiert nach Satz 2.1, der wegen der Voraussetzungen über die Anfangsstücke von M_1 und M_2 angewendet werden kann, entweder ein $\tilde{\eta} \in \{\eta_{1_0}, \dots, \eta_{1_q}\}$, so daß $(f-s)(\cdot, \tilde{\eta})$ eine Alternante mit $p+2$ Punkten in $[\alpha, \beta]$ besitzt oder es gibt ein Alternantengitter mit $(p+1)(q+1)$ Punkten für $f - s$ in $\tilde{T}$.

Da nach Voraussetzung die Extrempunkte von $f - s$ bzgl T in $\tilde{T}$ liegen, ist der Satz bewiesen.

2.6 Satz:

Es seien die Voraussetzungen von Satz 2.5 gültig. Für $1 \leq \tilde{q} \leq q$ bilde man $\tilde{T} = \bigcup_{v=0}^{\tilde{q}} [\alpha, \beta] \times \{\eta_{1_v}\}$. Dann gilt für jede Minimallösung $s \in V_{k,1}$ für $f \in C(\tilde{T})$ bzgl $V_{k,1}$ auf $\tilde{T}$ eine der beiden folgenden Bedingungen:

- (i) Es existiert ein $\tilde{\eta} \in \{\eta_{1_0}, \dots, \eta_{1_{\tilde{q}}}\}$, so daß $(f-s)(\cdot, \tilde{\eta})$ in $[\alpha, \beta]$ eine Alternante mit mindestens $p+2$ Punkten besitzt
- (ii) Es existiert in $\tilde{T}$ ein Alternantengitter für $f - s$ mit $(p+1)(\tilde{q}+1)$ Punkten

Beweis:

Wenn s Minimallösung für f auf $\tilde{T}$ ist, ist 0 Minimallösung für $f - s$ auf $\tilde{T}$ bzgl $V_{p, \tilde{q}}$. Dann folgt das Gewünschte nach Satz 2.1.

§ 3. Alternanteneigenschaften bei der Approximation
von reellen Funktionen in 2 Variablen durch
reelle Splines in 2 Variablen

In diesem Paragraphen wenden wir uns speziellen schwachen Markoff-Systemen zu, deren Elemente B-Splines sind. Zu diesen Splines lassen sich von einem Parameter $t > 0$ abhängige Markoff-Systeme angeben, deren Elemente für $t \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen die B-Splines konvergieren, so daß wir die in Paragraph 1 und 2 gezeigten Sätze auf die Approximation durch reelle Splines in 2 Variablen auf R bzw T übertragen können. Außerdem läßt sich eine weitere hinreichende Bedingung für eine Minimallösung unter Verwendung von Hilfssätzen aus Paragraph 1 angeben. Schließlich untersuchen wir die Eindeutigkeit von Minimallösungen, die sich durch ein Alternantengitter charakterisieren lassen, in Abhängigkeit der Lage der Gitterpunkte im Knotengitterwerk der Splines.

Zunächst wollen wir die B-Splines in einer von KARLIN [9] angegebenen Form einführen: Dazu seien $m \geq 2, n \geq 2$.

Es sei $\dots \leq x_{-2} \leq x_{-1} \leq x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots$ eine Folge fester reeller Zahlen mit $x_v \rightarrow \pm\infty$ für $v \rightarrow \pm\infty$, wobei höchstens $m - 1$ Zahlen übereinstimmen.

Für eine zweite Folge fester reeller Zahlen mit

$\cdot \cdot \cdot \leq y_{-2} \leq y_{-1} \leq y_0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \cdot \cdot \cdot$ mit $y_v \rightarrow \pm\infty$ für $v \rightarrow \pm\infty$ stimmen höchstens $n - 1$ Zahlen überein.

Nun sei ein System von Funktionen $\{h_v(x)\}_{v=1,\dots,m}$ auf $(-\infty, \infty)$ mit $h_v(x) \in C^{m-v}(-\infty, \infty)$, $v = 1, \dots, m$ und $h_v(x) > 0$ auf $(-\infty, \infty)$ gegeben. Dann bildet das System von Funktionen

$$g_1(x) = h_1(x)$$

$$g_2(x) = h_1(x) \int_a^x h_2(\xi_1) d\xi_1$$

.

.

.

$$g_m(x) = h_1(x) \int_a^x h_2(\xi_1) \int_a^{\xi_1} h_3(\xi_2) \cdot \cdot \cdot \int_a^{\xi_{m-2}} h_m(\xi_{m-1}) d\xi_{m-1} \dots d\xi_1$$

nach KARLIN [9], S. 276 ein erweitertes vollständiges Tschebyscheff-System auf $(-\infty, \infty)$ (sh. Def. 1.4) für jedes $a \in \mathbb{R}$.

Wir definieren die Funktion

$$\phi_m(x, t) := \begin{cases} h_1(x) \int_t^x h_2(\xi_1) \dots \int_t^{\xi_{m-2}} h_m(\xi_{m-1}) d\xi_{m-1} \dots d\xi_1 & t \leq x \\ 0 & t > x \end{cases}$$

Dann ist $\phi_m(x, t) \in C^{m-2}(-\infty, \infty)$ in x und in t .

Mit Hilfe dieser Funktion führen wir die B-Splines ein.

Zur Vereinfachung schreiben wir im folgenden statt

$$\phi_m^* \begin{pmatrix} x_v & \cdot & \cdot & x_{v+m} \\ a & \dots & a & \xi \end{pmatrix} \quad \text{nur} \quad \phi_m^* \begin{pmatrix} v & v+m \\ a & \dots & a & \xi \end{pmatrix}, \quad \text{da die}$$

Punkte x_μ stets zur gegebenen Knotenverteilung gehören.

3.1 Definition:

Die Funktion, definiert durch

$$B_{m,v}(\xi) = \frac{\phi_m^* \begin{pmatrix} v & \dots & v+m \\ a & \dots & a & \xi \end{pmatrix}}{\phi_{m+1}^* \begin{pmatrix} v & \dots & v+m \\ a & \dots & a \end{pmatrix}}$$

mit $\xi > a, x_v > a$ heißt B-Spline der Ordnung m.

Die x_μ sind Elemente der gegebenen Knotenmenge.

(Zur Definition von $\phi_m^* \begin{pmatrix} v & \dots & v+m \\ a & \dots & a & \xi \end{pmatrix}$

sh. Definition 1.4). Nach KARLIN ist $B_{m,v}$ von a unabhängig.

KARLIN [9], S. 521 ff. bewies folgende Eigenschaften der B-Splines:

3.2 Hilfssatz:

Die Funktion $B_{m,v}(x)$ ist nichtnegativ für alle x und positiv nur für $x_v < x < x_{v+m}$.

3.3 Hilfssatz:

Für ein $p \in \mathbb{N}$ und für alle $a < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_p$ und alle $v \in \mathbb{Z}$ gilt für die Determinante

$$B_m \begin{pmatrix} v & v+1 & \dots & v+p-1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} B_{m,v}(\xi_1) & \dots & B_{m,v+p-1}(\xi_1) \\ \vdots & & \vdots \\ B_{m,v}(\xi_p) & \dots & B_{m,v+p-1}(\xi_p) \end{vmatrix} \geq 0.$$

Die strikte Ungleichung gilt dann und nur dann, wenn

$$x_{v+j-1} < \xi_j < x_{v+j+m-1}, \quad j = 1, \dots, p,$$

gilt.

3.4 Hilfssatz:

Für alle $v_1 < \dots < v_p$ mit $v_1 \in \mathbb{Z}$ und alle

$a < \xi_1 < \dots < \xi_p$ mit $\xi_j \in (-\infty, \infty)$ gilt:

$$B_m \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_p \\ \xi_1 & \dots & \xi_p \end{pmatrix} \geq 0$$

3.5 Hilfssatz:

Für alle $v \in \mathbb{Z}$ bildet das Funktionensystem

$B_v = \{B_{m,v}(x), B_{m,v+1}(x), \dots\}$ ein schwaches

Markoff-System in $(-\infty, \infty)$.

Beweis:

Man wähle ein beliebiges Anfangsstück

$\{B_{m,v}(x), \dots, B_{m,v+p-1}(x)\}$ mit $p \geq 1$. Wegen

$$B_m \begin{pmatrix} v & \dots & v+p-1 \\ \xi_1 & \dots & \xi_p \end{pmatrix} > 0 \quad \text{für } x_{v+j-1} < \xi_j < x_{v+j+m-1}$$

für $j = 1, \dots, p$ sind die Funktionen $B_{m,v}(x), \dots, B_{m,v+p-1}(x)$ in $(-\infty, \infty)$ linear unabhängig. Wegen

$$B_m \begin{pmatrix} v & \dots & v+p-1 \\ \xi_1 & \dots & \xi_p \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{für alle } \xi_j \text{ mit}$$

$a < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_p$ bildet B_v ein schwaches

Markoff-System.

Bevor wir nun von einem Parameter $t > 0$ abhängige Funktionen $u_v(x, t)$ konstruieren, die gegen die B-Splines $B_{m,v}(x)$ gleichmäßig konvergieren, möchten wir folgendes Problem behandeln. In Hilfssatz 3.3 fällt auf, daß die ξ_i paarweise verschieden sind. Wir werden nun zeigen,

daß die Determinante
$$B_m^* \begin{pmatrix} v & v+1 & \dots & v+p-1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_p \end{pmatrix}$$

für zusammenfallende Punkte ξ_i nichtnegativ ist und unter welchen Bedingungen an die ξ_i die strikte Positivität gilt. Diese Aussage wird bei Eindeutigkeitsfragen gebraucht.

Dazu wählen wir folgende Voraussetzungen:

Gegeben seien p ganze Zahlen $v_1 < \dots < v_p$. Wir bezeichnen mit v_μ die größte Vielfachheit unter den x_ρ in $[x_\mu, x_{\mu+m}]$ mit $\mu = v_1, \dots, v_p$. Nach Voraussetzung ist $v_\mu \leq m-1$.

Zu den l reellen Zahlen $a < \xi_1 < \dots < \xi_l$ mit $l \leq p$ seien

l natürliche Zahlen m_i mit $m_i \leq m - \max_{\mu=v_1, \dots, v_p} v_\mu$ für $i = 1, \dots, l$ und $\sum_{i=1}^l m_i = p$ gegeben. Wegen $B_{m,\mu} \in C^{m-v_\mu-1}(-\infty, \infty)$ für $\mu = v_1, \dots, v_p$ kann
$$B_m^* \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_p \\ \eta_1 & \dots & \eta_p \end{pmatrix}$$

gebildet werden, wobei $(\eta_1, \dots, \eta_p) = (\underbrace{\xi_1, \dots, \xi_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{\xi_l, \dots, \xi_l}_{m_l})$

ist.

Nach KARLIN [9], S. 50 gilt:

$$B_m^* \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_p \\ \eta_1 & \dots & \eta_p \end{pmatrix} \geq 0$$

Dies wird unter Verwendung des Mittelwertsatzes bewiesen.

Wählt man $v_1 = v, \dots, v_p = v+p-1$, so kann man zeigen,

das

$$B_m^* \begin{pmatrix} v & \dots & v+p-1 \\ \eta_1 & \dots & \eta_p \end{pmatrix} > 0 \Leftrightarrow x_{v+j-1} < \eta_j < x_{v+m+j-1}, \quad j = 1, \dots, p,$$

gilt.

Dazu benötigen wir noch 2 Hilfssätze und einige Bezeichnungen:

3.6 Hilfssatz (KARLIN [9], S. 503):

Es ist

$$\Phi_m^* \begin{pmatrix} v & \dots & v+p+m-1 \\ a & \dots & a \quad \eta_1 \dots \quad \eta_p \end{pmatrix} > 0 \Leftrightarrow$$

$$x_{v+j-1} < \eta_j < x_{v+m+j-1},$$

$$j = 1, \dots, p, \quad a < x_v$$

3.7 Bezeichnungen:

$$\text{Es sei } \hat{B}_m(\xi) := \Phi_m^* \begin{pmatrix} v & \dots & v+m \\ a & \dots & a \quad \xi \end{pmatrix}.$$

Wir definieren für $a < \xi_1 < \dots < \xi_p$:

$$\hat{B}_m \begin{pmatrix} v & \dots & v+p-1 \\ \xi_1 & \dots & \xi_1^{(r)} \dots \quad \xi_p \end{pmatrix} := \frac{\partial^r}{\partial \xi_1^r} \hat{B}_m \begin{pmatrix} v & \dots & v+p-1 \\ \xi_1 & \dots & \xi_p \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \tilde{B}_{m,v}(\xi_1) & \dots & \tilde{B}_{m,v+p-1}(\xi_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{d^r}{d\xi_1^r} \tilde{B}_{m,v}(\xi_1) & \dots & \frac{d^r}{d\xi_1^r} \tilde{B}_{m,v+p-1}(\xi_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{B}_{m,v}(\xi_p) & \dots & \tilde{B}_{m,v+p-1}(\xi_p) \end{vmatrix}$$

3.8 Hilfssatz (KARLIN [9], S. 524):

Für alle reellen Zahlen ξ_j mit $a < \xi_1 < \dots < \xi_p$ gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{B}_m \begin{pmatrix} v & \dots & v+p-1 \\ \xi_1 & \dots & \xi_p \end{pmatrix} &= \\ = \phi_m^* \begin{pmatrix} v & \dots & v+p+m-1 \\ a & \dots & a \end{pmatrix} \cdot \prod_{j=1}^{p-1} \phi_m^* \begin{pmatrix} v+j & \dots & v+j+m-1 \\ a & \dots & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dann gilt:

3.9 Satz:

Es ist

$$\begin{aligned} \tilde{B}_m^* \begin{pmatrix} v & \dots & v+p-1 \\ \eta_1 & \dots & \eta_p \end{pmatrix} &= \\ = \phi_m^* \begin{pmatrix} v & \dots & v+p+m-1 \\ a & \dots & a \end{pmatrix} \cdot \prod_{j=1}^{p-1} \phi_m^* \begin{pmatrix} v+j & \dots & v+j+m-1 \\ a & \dots & a \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

mit $(\eta_1, \dots, \eta_p) = (\underbrace{\xi_1, \dots, \xi_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{\xi_1, \dots, \xi_1}_{m_i}, \dots, \xi_1)$,

$a < \xi_1 < \dots < \xi_1$, $m_1 \leq m-1$ max $\mu=v, \dots, v+p-1$ für $i = 1, \dots, 1$

und $\sum_{i=1}^1 m_i = p$.

Beweis:

Es sei für p reelle Zahlen τ_j mit $a < \tau_1 < \dots < \tau_p$
und für $1 \leq \mu+1 < \mu+r \leq p$:

$$\Phi(\tau_{\mu+1}, \dots, \tau_{\mu+r}) = \hat{B}_m \begin{pmatrix} v & \dots & v+p-1 \\ \tau_1 & \dots & \tau_\mu & \tau_{\mu+1} & \dots & \tau_p \end{pmatrix}$$

Dann erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j}{\partial \tau_{\mu+1}^j} \Phi(\tau_{\mu+1}, \dots, \tau_{\mu+r}) &= \hat{B}_m \begin{pmatrix} v & \dots & v+p-1 \\ \tau_1 & \dots & \tau_{\mu+1}^{(j)} & \dots & \tau_p \end{pmatrix} \\ &= \Phi_m^* \begin{pmatrix} v & \dots & v+p+m-1 \\ a & \dots & a & \tau_1 & \dots & \tau_{\mu+1}^{(j)} & \dots & \tau_p \end{pmatrix} \cdot \prod_{j=1}^{p-1} \Phi_m^* \begin{pmatrix} v+j & \dots & v+j+m-1 \\ a & \dots & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{für } 1 \leq j \leq m - \max_{\mu=v, \dots, v+p-1} v_\mu - 1$$

$$\text{Daraus folgt für } r \leq m - \max_{\mu=v, \dots, v+p-1} v_\mu - 1:$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^r}{\partial \tau_{\mu+r}^r} \frac{\partial^{r-1}}{\partial \tau_{\mu+r-1}^{r-1}} \dots \frac{\partial}{\partial \tau_{\mu+1}} \Phi(\tau_{\mu+1}, \dots, \tau_{\mu+r}) \\ = \hat{B}_m \begin{pmatrix} v & \dots & v+p-1 \\ \tau_1 & \dots & \tau_\mu & \tau_{\mu+1}^{(1)} & \dots & \tau_{\mu+r}^{(r)} & \dots & \tau_p \end{pmatrix} \\ = \Phi_m^* \begin{pmatrix} v & \dots & v+p+m-1 \\ a & \dots & a & \tau_1 & \dots & \tau_{\mu+1}^{(1)} & \dots & \tau_{\mu+r}^{(r)} & \dots & \tau_p \end{pmatrix} \cdot \\ \cdot \prod_{j=1}^{p-1} \Phi_m^* \begin{pmatrix} v+j & \dots & v+j+m-1 \\ a & \dots & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dann gilt aus Stetigkeitsgründen:

$$\begin{aligned}
 & \hat{B}_m^* \left(\begin{matrix} v & & & & v+p-1 \\ \tau_1 & \dots & \underbrace{\tau_\mu \dots \tau_\mu}_{r+1} & \tau_{\mu+r+1} & \dots & \tau_p \end{matrix} \right) = \\
 & = \lim_{\substack{\tau_{\mu+r} + \tau_\mu \\ \tau_\mu < \tau_{\mu+1} < \dots < \tau_{\mu+r}}} \hat{B}_m^* \left(\begin{matrix} v & & & & (r) & v+p-1 \\ \tau_1 & \dots & \tau_\mu & \dots & \tau_{\mu+r} & \dots & \tau_p \end{matrix} \right) = \\
 & = \lim_{\substack{\tau_{\mu+r} + \tau_\mu \\ \tau_\mu < \tau_{\mu+1} < \dots < \tau_{\mu+r}}} \hat{\Phi}_m^* \left(\begin{matrix} v & & & & (r) & v+p+m-1 \\ a & \dots & a & \tau_1 & \dots & \tau_\mu & \dots & \tau_{\mu+r} & \dots & \tau_p \end{matrix} \right) = \\
 & \quad \cdot \prod_{j=1}^{p-1} \hat{\Phi}_m^* \left(\begin{matrix} v+j & \dots & v+j+m-1 \\ a & \dots & a \end{matrix} \right) = \\
 & = \hat{\Phi}_m^* \left(\begin{matrix} v & & & & v+p+m-1 \\ a & \dots & a & \tau_1 & \dots & \underbrace{\tau_\mu \dots \tau_\mu}_{r+1} & \tau_{\mu+r+1} & \dots & \tau_p \end{matrix} \right) \cdot \\
 & \quad \cdot \prod_{j=1}^{p-1} \hat{\Phi}_m^* \left(\begin{matrix} v+j & \dots & v+j+m-1 \\ a & \dots & a \end{matrix} \right)
 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung.

3.10 Folgerung:

Es ist

$$\hat{B}_m^* \left(\begin{matrix} v & \dots & v+p-1 \\ \eta_1 & \dots & \eta_p \end{matrix} \right) > 0 \iff x_{v+j-1} < \eta_j < x_{v+m+j-1}, \\
 j = 1, \dots, p$$

Beweis:

Nach Hilfssatz 3.6 folgt sowohl wegen $a < x_v < x_{v+j}$

$$\prod_{j=1}^{p-1} \phi_m^* \begin{pmatrix} v+j & \dots & v+j+m-1 \\ a & \dots & a \end{pmatrix} > 0 \text{ als auch}$$

$$\phi_m^* \begin{pmatrix} v & \dots & v+p+m-1 \\ a & \dots & a \quad \eta_1 \dots \eta_p \end{pmatrix} > 0 \text{ unter den gegebenen Bedingungen.}$$

3.11 Bemerkung:

Wählt man $r_0 = 0$, $r_s = \sum_{i=1}^s m_i$, so erhält man:

$$B_m^* \begin{pmatrix} v & \dots & v+p-1 \\ \eta_1 & \dots & \eta_p \end{pmatrix} > 0 \Leftrightarrow x_{v+r_s-1} < \xi_s < x_{v+m+r_{s-1}}, \\ s = 1, \dots, l$$

Wir werden nun zu den schwachen Markoff-Systemen, deren Elemente B-Splines sind, Markoff-Systeme konstruieren, die die Bedingungen von § 1 erfüllen.

3.12 Definition:

Eine Funktion $f(x,y)$ heißt strikt total positiv auf $[a,b] \times [c,d]$, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für alle $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$ und $c \leq y_1 < \dots < y_n \leq d$ gilt:

$$F \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} f(x_1, y_1) & \dots & f(x_1, y_n) \\ \vdots & & \vdots \\ f(x_n, y_1) & \dots & f(x_n, y_n) \end{vmatrix} > 0$$

Eine Funktion $f(x,y)$ heißt erweitert total positiv in x bzw in y , wenn sie strikt total positiv auf

$[a,b] \times [c,d]$ ist und wenn für $a \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq b$ bzw
für $c \leq y_1 \leq \dots \leq y_n \leq d$

$$F \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ y_1 & \dots & y_n \end{pmatrix} \text{ positiv ist.}$$

Die von einem Parameter $t > 0$ abhängige Funktion

$$K(x,y;t) := e^{-\frac{(x-y)^2}{2t^2}}, x,y \in \mathbb{R} \text{ hei\ss t GAUSSscher Kern.}$$

Nach KARLIN, STUDDEN [10], S.11 gilt für diese Funktion:

$K(x,y;t)$ ist erweitert total positiv in y auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Wir definieren nun folgende von $t > 0$ abhängige Funktion:

$$u_{m,\mu}(x,t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2t^2}} B_{m,\mu}(\xi) d\xi \quad (3.1)$$

Zunächst folgt sofort aus der Beschränktheit des Integranden und der Stetigkeit des GAUSSschen Kerns in x die Stetigkeit von $u_{m,\mu}(x,t)$. Für die Untersuchung weiterer Eigenschaften von $u_{m,\mu}(x,t)$ muß folgendes gezeigt werden:

3.13 Hilfssatz:

Die Funktion $u_{m,\mu}(x,t)$ ist strikt total positiv in $\mu \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$ und erweitert total positiv in $x \in \mathbb{R}$.

Beweis:

Für jede Wahl von $v_1 < \dots < v_p$, $\xi_1 < \dots < \xi_p$, $v_j \in \mathbb{Z}$, $\xi_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, p$ und $p \in \mathbb{N}$ soll gelten:

$$U_m \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_p \\ \xi_1 & \dots & \xi_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u_{m,v_1}(\xi_1, t) & \dots & u_{m,v_p}(\xi_1, t) \\ \vdots & & \vdots \\ u_{m,v_1}(\xi_p, t) & \dots & u_{m,v_p}(\xi_p, t) \end{vmatrix} > 0.$$

Dies folgt unter Verwendung der basic composition formula (sh. KARLIN [9], S. 17) aus dem Beweis von Satz 4.1, KARLIN [9], S. 528.

Nun seien p reelle Zahlen ξ_j mit $\xi_1 \leq \dots \leq \xi_p$ gegeben, wobei unter den ξ_j l verschiedene Werte seien und m_i , $i = 1, \dots, l$ die Vielfachheiten dieser Werte bezeichnen. Dann folgt ebenfalls aus dem Beweis der basic composition formula:

$$U_m^* \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_p \\ \xi_1 & \dots & \xi_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u_{m,v_1}(\xi_1, t) & \dots & u_{m,v_p}(\xi_1, t) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{m_1-1}}{\partial x^{m_1-1}} u_{m,v_1}(\xi_{m_1}, t) & \dots & \frac{\partial^{m_1-1}}{\partial x^{m_1-1}} u_{m,v_p}(\xi_{m_1}, t) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{m_l-1}}{\partial x^{m_l-1}} u_{m,v_1}(\xi_p, t) & \dots & \frac{\partial^{m_l-1}}{\partial x^{m_l-1}} u_{m,v_p}(\xi_p, t) \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \right)^p \int \dots \int_{-\infty < \eta_1 < \dots < \eta_p < \infty} \left| \begin{array}{cccc} e^{\frac{-(\xi_1 - \eta_1)^2}{2t^2}} & & & e^{\frac{-(\xi_1 - \eta_p)^2}{2t^2}} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & e^{\frac{-(\xi_{m_1} - \eta_1)^2}{2t^2}} & e^{\frac{-(\xi_{m_1} - \eta_p)^2}{2t^2}} \\ & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{m_1-1}}{\partial x^{m_1-1}} e^{\frac{-(\xi_1 - \eta_1)^2}{2t^2}} & \dots & \frac{\partial^{m_1-1}}{\partial x^{m_1-1}} e^{\frac{-(\xi_1 - \eta_p)^2}{2t^2}} \\ & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^{m_1-1}}{\partial x^{m_1-1}} e^{\frac{-(\xi_p - \eta_1)^2}{2t^2}} & \dots & \frac{\partial^{m_1-1}}{\partial x^{m_1-1}} e^{\frac{-(\xi_p - \eta_p)^2}{2t^2}} \end{array} \right|$$

$$x \left| \begin{array}{cccc} B_{m,v_1}(\eta_1) & \dots & B_{m,v_p}(\eta_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ B_{m,v_1}(\eta_p) & \dots & B_{m,v_p}(\eta_p) \end{array} \right| d\eta_1 \dots d\eta_p$$

Dabei ist zu beachten, daß die basic composition formula zunächst nur für $\xi_1 < \dots < \xi_p$ gilt, also nur die Funktionen, nicht aber deren Ableitungen in den Determinanten unter dem Integral einbezieht. Da jedoch in unserem Fall nur Ableitungen nach x gebildet werden, aber nach $\eta_1, \dots, \eta_p$ integriert wird, läßt sich die basic composition formula auf diesen Fall erweitern.

In der obigen Formel ist die 1. Determinante unter dem Integral stets positiv für $\xi_1 \leq \dots \leq \xi_p$ und $\eta_1 < \dots < \eta_p$. Die 2. Determinante unter dem Integral ist in bestimmten offenen Mengen des Integrationsbereichs positiv. Dies wurde schon im 1. Teil des Beweises benötigt und ist im Beweis von Satz 4.1, KARLIN [9], S. 528 enthalten. Deshalb ergibt sich stets für jede Wahl $v_1 < \dots < v_p$ und $\xi_1 \leq \dots \leq \xi_p$:

$$U_m^* \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_p \\ \xi_1 & \dots & \xi_p \end{pmatrix} > 0$$

Weitere Eigenschaften von $u_{m,\mu}(x,t)$:

3.14 Hilfssatz:

- (i) $u_{m,\mu}(x,t)$ konvergiert für $t \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen $B_{m,\mu}(x)$
- (ii) $u_{m,\mu}(x,t)$ ist unendlich oft differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^r}{\partial x^r} u_{m,\mu}(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^r}{\partial x^r} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2t^2}} B_{m,\mu}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2t^2}} \frac{d^r}{d\xi^r} B_{m,\mu}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

für $r = 1, \dots, m-v_\mu - 1$.

(v_μ wurde vor Hilfssatz 3.6 eingeführt)

Beweis:

(i) wurde von KARLIN [9], S. 528 gezeigt

(ii) für $r = 1, \dots, m-v_\mu-1$ gilt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^r}{\partial x^r} u_{m,\mu}(x,t) &= \frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{r-1}} \left(\frac{\partial}{\partial x} u_{m,\mu}(x,t) \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{r-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2t}} B_{m,\mu}(\xi) d\xi \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{r-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2t}} \right) B_{m,\mu}(\xi) d\xi \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{r-1}} \left(- \left[e^{-\frac{(x-x_{\mu+m})^2}{2t}} B_{m,\mu}(x_{\mu+m}) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - e^{-\frac{(x-x_\mu)^2}{2t}} B_{m,\mu}(x_\mu) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2t}} \frac{d}{d\xi} B_{m,\mu}(\xi) d\xi \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{\partial^{r-1}}{\partial x^{r-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2t}} \frac{d}{d\xi} B_{m,\mu}(\xi) d\xi \right)
 \end{aligned}$$

Dies wird weitere $(r-1)$ -mal durchgeführt und ergibt

schließlich die angegebene Beziehung.

Außerdem gilt stets

$$\frac{\partial^r}{\partial x^r} u_{m,\mu}(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^r}{\partial x^r} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2t}} B_{m,\mu}(\xi) d\xi$$

für alle $r \in \mathbb{N}$.

Schließlich wollen wir untersuchen, wieviele Nullstellen die Funktion $u_{m,\mu}^{(r)}(x,t)$ für $r = 0, \dots, m-2$ besitzt, wenn die Knoten $x_\mu, \dots, x_{\mu+m}$ einfach sind. Dazu soll ein Satz von SCHOENBERG [4] über die Nullstellen von $B_{m,\mu}^{(r)}(x)$ angeführt werden.

3.15 Hilfssatz:

Für $r = 0, \dots, m-2$ besitzt die r -te Ableitung von $B_{m,\mu}(x)$, sofern die Knoten $x_\mu, \dots, x_{\mu+m}$ einfach sind, genau r verschiedene einfache Nullstellen in $(x_\mu, x_{\mu+m})$.

3.16 Satz:

Es existiert ein $\xi > 0$, so daß für alle t mit $0 < t < \xi$ die Funktionen $u_{m,\mu}^{(r)}(x,t)$ für $r = 0, \dots, m-2$ genau r verschiedene einfache Nullstellen in $(x_\mu, x_{\mu+m})$ besitzen.

Beweis:

Da der GAUSSsche Kern $K(x,y;t)$ strikt total positiv auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist und $B_{m,\mu}^{(r)}(x)$ für $r = 0, \dots, m-2$ nach Hilfssatz 3.15 r echte Vorzeichenwechsel in $(x_\mu, x_{\mu+m})$ besitzt und außerdem $B_{m,\mu}^{(r)}(x) \neq 0$ bis auf endlich viele Punkte in $(x_\mu, x_{\mu+m})$ ist, besitzt $u_{m,\mu}^{(r)}(x,t)$ nach KARLIN [9], Satz 3.1, S. 233 unter Verwendung von Hilfssatz 3.14 höchstens r verschiedene Nullstellen mit Vorzeichenwechsel in $(x_\mu, x_{\mu+m})$. Da $u_{m,\mu}^{(r)}(x,t)$ für $t \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen $B_{m,\mu}^{(r)}(x)$ konvergiert, existiert ein $\tilde{t} > 0$, so daß für alle t mit $0 < t \leq \tilde{t}$ $u_{m,\mu}^{(r)}(x,t)$ ebenfalls r -mal echt das Vorzeichen wechselt. Dies bedeutet, daß $u_{m,\mu}^{(r)}(x,t)$ mindestens r verschiedene einfache Nullstellen in $(x_\mu, x_{\mu+m})$ besitzt und damit erhält man das gewünschte Ergebnis.

Wir wollen jetzt auf die ursprüngliche Aufgabe dieser Arbeit, die Approximation von stetigen reellen Funktionen durch Elemente aus $V_{k,1}$ zu untersuchen, zurückkommen. Es sei R ein Rechteck im $\mathbb{R}^2$ mit

$$R = [x_0, x_k] \times [y_0, y_1], \quad x_0 < x_k, \quad y_0 < y_1,$$

wobei die x_1 und die y_1 aus der zu Beginn von § 3 eingeführten Knotenverteilung stammen.

Nun sei m_0 die Vielfachheit von x_0 in $[x_0, x_k]$, dh.

$$x_0 = x_1 = \dots = x_{m_0-1} < x_{m_0} \leq \dots \leq x_k.$$

Analog sei $\bar{m}_k$ die Vielfachheit von x_k in $[x_0, x_k]$, dh.

$$x_0 \leq \dots \leq x_{k-\bar{m}_k} < x_{k-\bar{m}_k+1} = \dots = x_k.$$

Genauso definiere man n_0 als die Vielfachheit von y_0 in $[y_0, y_1]$ und $\bar{n}_1$ als die Vielfachheit von y_1 in $[y_0, y_1]$.

Wie in § 1 führe man nun von $t > 0$ abhängige Markoff-Systeme

$$M_{1,t} = \{u_{m,m_0-m}(x,t), \dots, u_{m,k-\bar{m}_k}(x,t), \dots\} \text{ und}$$

$$M_{2,t} = \{u_{n,n_0-n}(x,t), \dots, u_{n,1-\bar{n}_1}(x,t), \dots\}$$

ein, wobei die $u_{m,\mu}(x,t)$ bzw die $u_{n,\nu}(x,t)$ in (3.1) definiert sind. Daß $M_{1,t}$ und $M_{2,t}$ Markoff-Systeme sind, liefert Hilfssatz 3.13. Man bilde nun wie in § 1 die

Räume $V_{k,1;t}$ mit

$$V_{k,1;t} = \{s | s(x,y,t) = \sum_{\mu=m_0-m}^{k-\bar{m}_k} \sum_{\nu=n_0-n}^{1-\bar{n}_1} \alpha_{\mu\nu} u_{m,\mu}(x,t) u_{n,\nu}(y,t) \\ \alpha_{k-\bar{m}_k, 1-\bar{n}_1} = 0 \}$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $u_{m,v}(x,t)$ gegen $B_{m,v}(x)$ bzw von $u_{n,v}(y,t)$ gegen $B_{n,v}(y)$ für $t \rightarrow 0$ entspricht dem Raum $V_{k,l}$ aus § 1 folgender Raum, von uns ebenfalls mit $V_{k,l}$ bezeichnet:

$$V_{k,l} = \{s | s(x,y) = \sum_{\mu=m_0-m}^{k-\bar{m}_k} \sum_{v=n_0-n}^{l-\bar{n}_l} \alpha_{\mu v} B_{m,\mu}(x) B_{n,v}(y), \\ \alpha_{k-\bar{m}_k, l-\bar{n}_l} = 0 \}$$

Nun lassen sich alle Sätze aus § 1 sofort übertragen.

Insbesondere folgt also nach Satz 1.14 aus der Existenz eines Alternantengitters für $f - s$ auf R mit

$(k-\bar{m}_k+m-m_0+1)(l-\bar{n}_l+n-n_0+1)$ Punkten, daß $s \in V_{k,l}$ Minimallösung für f bzgl $V_{k,l}$ auf R ist. Aufgrund der speziellen Struktur der Splines lassen sich nun weitergehende Aussagen machen. Zunächst wird gezeigt, daß das Alternantengitter nicht mindestens $(k-\bar{m}_k+m-m_0+1)(l-\bar{n}_l+n-n_0+1)$ Punkte besitzen muß, um eine Minimallösung zu charakterisieren, sondern es genügen weniger Alternantenpunkte, um eine hinreichende Bedingung für eine Minimallösung zu erhalten, sofern diese Punkte in einem bestimmten Teilrechteck von R liegen.

3.17 Satz:

Zu $f \in C(R)$ und einem $s \in V_{k,l}$ existieren 2 Zahlen $u \in \{0, \dots, k\}$, $v \in \{0, \dots, l\}$ mit $x_u < x_k$, $y_v < y_l$, so daß für $f - s$ auf dem Rechteck

$G = [x_u, x_k] \times [y_v, y_l]$ ein Alternantengitter (bzgl R)

$$W = \sum_{v=0}^{1-\bar{n}_1+n-n_v-v} \{ \xi_{0v}, \dots, \xi_{k-\bar{m}_k+m-m_u-u, v} \} x(\eta_v)$$

mit $\xi_{\rho v} < \xi_{\sigma v}$ für $\rho < \sigma$ und $\eta_\mu < \eta_v$ für $\mu < v$,
wobei m_u die Vielfachheit von x_u in $[x_u, x_k]$ und
 n_v die Vielfachheit von y_v in $[y_v, y_1]$ bezeichnen,
existiert.

Dann ist s Minimallösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf R .

Beweis:

Annahme: Es existiert ein $\tilde{s} \in V_{k,1}$ mit $||f-\tilde{s}||_R < ||f-s||_R$

Wegen $\varepsilon(-1)^{\mu+v}(f-s)(\xi_{\mu v}, \eta_v) = ||f-s||_R$

$$> \varepsilon(-1)^{\mu+v}(f-\tilde{s})(\xi_{\mu v}, \eta_v)$$

für $\varepsilon = \pm 1$, $\mu = 0, \dots, k-\bar{m}_k+m-m_u-u$, $v = 0, \dots, 1-\bar{n}_1+n-n_v-v$

gilt $\varepsilon(-1)^{\mu+v}(\tilde{s}-s)(\xi_{\mu v}, \eta_v) > 0$. (*)

Die Funktion $\tilde{s} - s$ läßt sich auf G folgendermaßen darstellen:

$$\text{rest}_G(\tilde{s}-s)(x, y) = \sum_{\mu=u+m_u-m}^{k-\bar{m}_k} \sum_{v=v+n_v-n}^{1-\bar{n}_1} a_{\mu v} B_{m, \mu}(x) B_{n, v}(y),$$

$$a_{k-\bar{m}_k, 1-\bar{n}_1} = 0$$

Die Indizierung ergibt sich aus der Tatsache, daß

$B_{m, \mu}(x) = 0$ für $x \notin (x_\mu, x_{\mu+m})$ ist.

$\text{rest}_G(\tilde{s}-s)$ besitzt auf G ein Punktegitter aus

$(k-\bar{m}_k+m-m_u-u+1)(1-\bar{n}_1+n-n_v-v+1)$ Punkten mit der

Eigenschaft (*). Dies ist aber nach Hilfssatz 1.13

ein Widerspruch. Deshalb ist s Minimallösung für f

bzgl $V_{k,1}$ auf R .

3.18 Bemerkung:

Das Alternantengitter W kann auf G auch durch

$$W = \bigcup_{\mu=0}^{k-\bar{m}_k+m-m_0-u} \{ \xi_\mu \} \times \{ \eta_{\mu 0}, \dots, \eta_{\mu, 1-\bar{n}_1+n-n_v-v} \}$$

mit $\xi_\mu < \xi_\nu$ für $\mu < \nu$ und $\eta_{\mu\rho} < \eta_{\mu\sigma}$ für $\rho < \sigma$ gegeben sein. Der Beweis des Satzes verläuft ganz analog. Deshalb werden wir diese "symmetrische" Aussage in den folgenden Sätzen nicht mehr erwähnen.

Wir wenden uns nun der Frage zu, wann eine Minimallösung $s \in V_{k,1}$ eindeutig ist. Wir verschärfen unter bestimmten Voraussetzungen Hilfssatz 1.13. Dazu benötigen wir eine Einschränkung: Die Knoten x_μ , $\mu = 0, \dots, k$ bzw. die Knoten y_ν , $\nu = 0, \dots, l$ seien für $m \geq 3$ höchstens $(m-2)$ -mal bzw. für $n \geq 3$ höchstens $(n-2)$ -mal vertreten. Wir beschränken uns auf den Fall $m \geq 3$, $n \geq 3$.

Zur Abkürzung setzen wir:

$$\tilde{m} = k - \bar{m}_k + m - m_0$$

$$\tilde{n} = l - \bar{n}_1 + n - n_0$$

3.19 Hilfssatz:

Es sei auf R ein Punktegitter W mit

$$W = \bigcup_{v=0}^{\tilde{n}} \{ \xi_{0v}, \dots, \xi_{\tilde{m}v} \} \times \{ \eta_v \}$$

mit $\xi_{\rho v} < \xi_{\sigma v}$ für $\rho < \sigma$
und $\eta_\mu < \eta_\nu$ für $\mu < \nu$

und

$$x_{m_0-m+\mu+1} < \xi_{\mu v} < x_{m_0+\mu-1} \quad , \quad \mu = 1, \dots, \tilde{m}-1, \quad v = 0, \dots, \tilde{n}$$

$$y_{n_0-n+v} < \eta_v < y_{n_0+v-1} \quad , \quad v = 1, \dots, \tilde{n}$$

gegeben. Dann existiert kein $s \in V_{k,1}$ mit $s \not\equiv 0$ und

$$\epsilon (-1)^{u+v} s(\xi_{\mu\nu}, \eta_{\nu}) \geq 0, \quad \mu = 0, \dots, \tilde{m}, \quad \nu = 0, \dots, \tilde{n}, \quad \epsilon = \pm 1.$$

Beweis:

Wir nehmen an, es gebe ein $s \in V_{k,1}$ mit $s \not\equiv 0$ und

$$\epsilon (-1)^{u+v} s(\xi_{\mu\nu}, \eta_{\nu}) \geq 0, \quad \mu = 0, \dots, \tilde{m}, \quad \nu = 0, \dots, \tilde{n}, \quad \epsilon = \pm 1.$$

Es sei $\eta := \eta_{\nu_0}$. Dann gilt für die Punkte $\xi_{\mu} := \xi_{\mu\nu_0}$,
 $\mu = 0, \dots, \tilde{m}$:

$$\epsilon (-1)^{\mu+\nu_0} s(\xi_{\mu}, \eta) \geq 0 \quad (*)$$

Wir werden zunächst zeigen, daß man $\tilde{m}$ Nullstellen z_{μ}
 von $s(x, \eta)$ mit $z_{\mu-1} \in [\xi_{\mu-1}, \xi_{\mu}]$, $\mu = 1, \dots, \tilde{m}$ finden kann,
 die der zusätzlichen Bedingung genügen:

Ist $z_{\mu} = z_{\mu+1}$ für ein μ , so ist z_{μ} eine Nullstelle
 von $s(x, \eta)$ mit gerader Vielfachheit.

Zunächst folgt aus $(*)$ die Existenz von Nullstellen
 von $s(x, \eta)$ in jedem Intervall $[\xi_{\mu-1}, \xi_{\mu}]$. Wir legen
 die Nullstellen z_{μ} folgendermaßen fest:

$$z_{\mu} = \begin{cases} \xi_{\mu} & \text{falls } s(x, \eta) \not\equiv 0 \text{ für alle } x \in (\xi_{\mu}, \xi_{\mu+1}) \text{ ist} \\ & \text{und } s(x, \eta) \text{ in } \xi_{\mu} \text{ eine Nullstelle gerader} \\ & \text{Vielfachheit besitzt} \\ \xi_{\mu} & \text{falls } s(x, \eta) \not\equiv 0 \text{ für alle } x \in (\xi_{\mu}, \xi_{\mu+1}] \text{ ist} \\ \xi_{\mu} & \text{falls } s(x, \eta) \not\equiv 0 \text{ für alle } x \in (\xi_{\mu}, \xi_{\mu+1}) \text{ und} \\ & z_{\mu-1} < \xi_{\mu} \text{ ist} \\ z \in (\xi_{\mu}, \xi_{\mu+1}) & \text{falls } s(z, \eta) = 0 \text{ für ein} \\ & z \in (\xi_{\mu}, \xi_{\mu+1}) \text{ ist} \end{cases}$$

$$z_{\mu} = \begin{cases} \xi_{\mu+1} & \text{falls } s(\xi_{\mu+1}, \eta) = 0, s(x, \eta) \neq 0 \text{ für alle} \\ & x \in (\xi_{\mu}, \xi_{\mu+1}), z_{\mu-1} = \xi_{\mu} \text{ ist und falls} \\ & s(x, \eta) \text{ in } \xi_{\mu} \text{ eine Nullstelle ungerader} \\ & \text{Vielfachheit besitzt} \\ \xi_{\mu+1} & \text{falls } s(x, \eta) \neq 0 \text{ für alle } x \in [\xi_{\mu}, \xi_{\mu+1}) \text{ ist} \end{cases}$$

Nun sei für ein μ $z_{\mu} = z_{\mu+1} = \xi_{\mu+1}$. Wir werden zeigen, daß in $\xi_{\mu+1}$ $s(x, \eta)$ eine Nullstelle gerader Vielfachheit besitzt.

Annahme: $s(x, \eta)$ besitzt in $\xi_{\mu+1}$ eine Nullstelle ungerader Vielfachheit

Wegen $z_{\mu} = \xi_{\mu+1}$ gilt entweder

- a) $s(x, \eta) \neq 0$ für alle $x \in [\xi_{\mu}, \xi_{\mu+1})$ oder
- b) $s(x, \eta) \neq 0$ für alle $x \in (\xi_{\mu}, \xi_{\mu+1})$, $z_{\mu-1} = \xi_{\mu}$ und $s(x, \eta)$ besitzt in ξ_{μ} eine Nullstelle ungerader Vielfachheit

Wegen $z_{\mu+1} = \xi_{\mu+1}$ gilt

- c) $s(x, \eta) \neq 0$ für alle $x \in (\xi_{\mu+1}, \xi_{\mu+2}]$.

Wegen c) ist $s(\xi_{\mu+2}, \eta) \neq 0$. oBdA sei $s(\xi_{\mu+2}, \eta) > 0$.

Falls a) gilt, ist $s(\xi_{\mu}, \eta) \neq 0$ und, da $s(x, \eta)$ in $\xi_{\mu+1}$ das Vorzeichen wechselt, ist $s(\xi_{\mu}, \eta) < 0$. Dies ist ein Widerspruch zu (*) und $s(\xi_{\mu+2}, \eta) > 0$.

Also ist $z_{\mu-1} = \xi_{\mu}$. Dann gilt entweder

- d) $s(x, \eta) \neq 0$ für alle $x \in [\xi_{\mu-1}, \xi_{\mu})$ oder
- e) $s(x, \eta) \neq 0$ für alle $x \in (\xi_{\mu-1}, \xi_{\mu})$, $z_{\mu-2} = \xi_{\mu-1}$

und $s(x, \eta)$ besitzt in $\xi_{\mu-1}$ eine Nullstelle ungerader Vielfachheit

d) scheidet wegen $s(\xi_{\mu+2}, \eta) > 0$ aus. Dann ist nach e) $z_{\mu-2} = \xi_{\mu-1}$ und dieser Beweisgang läßt sich nun analog fortsetzen. Insbesondere erhält man:

$$z_{\mu-3} = \xi_{\mu-2}, \dots, z_0 = \xi_1.$$

Da auch ξ_1 Nullstelle ungerader Vielfachheit von $s(x, \eta)$ ist, muß ξ_0 ebenfalls Nullstelle von $s(x, \eta)$ sein. Dies ist ein Widerspruch zur Auswahl von z_0 . Denn für $s(\xi_0, \eta) = 0$ und $s(x, \eta) \neq 0$ für alle $x \in (\xi_0, \xi_1)$ wählen wir $z_0 = \xi_0$.

Die Nullstellen z_μ von $s(x, \eta)$ unterliegen folgenden Einschränkungen:

Wegen $x_{m_0-m+\mu+1} < \xi_\mu < x_{m_0+\mu-1}$ für $\mu = 1, \dots, \hat{m}-1$ erhält man

$$x_{m_0-m+\mu} < \xi_{\mu-1} \leq z_{\mu-1} \leq \xi_\mu < x_{m_0+\mu-1} \quad \text{für } \mu = 1, \dots, \hat{m}-1.$$

Dabei beachte man, daß $x_{m_0-m+1} < x_{0-} \leq \xi_0 < \xi_1$ gilt.

Dann erhält man

$$x_{m_0-m+\mu+1} < z_\mu < x_{m_0+\mu} \quad \text{für } \mu = 0, \dots, \hat{m}-1 \quad (\neq \neq)$$

Die letzte Bedingung gilt wegen

$$z_{\hat{m}-1} \leq \xi_{\hat{m}} < x_{k-\bar{m}_k+1} = x_k < x_{k-\bar{m}_k+m-1} = x_{m_0+\hat{m}-1}.$$

Wir werden nun zeigen, daß $s(x, \eta)$ keine von $z_0, \dots, z_{\hat{m}-1}$ verschiedenen Nullstellen in $(x_{m_0-m}, x_{k-\bar{m}_k+m})$ besitzt

und daß alle z_μ , die nur einmal auftreten, einfache Nullstellen sind.

Dazu nehmen wir zu $z_0, \dots, z_{m-1}^\vee$ einen Punkt

$t \in (x_{m_0-m}, x_{k-\bar{m}_k+m})$ hinzu, der in diese Punkte folgendermaßen eingeordnet wird:

$$t_0 := z_0 \leq t_1 := z_1 \leq \dots \leq t_{1_0} := z_{1_0} \leq t_{1_0+1} := t_1 \leq \dots \leq t_m^\vee := z_{m-1}^\vee$$

Wegen $(**)$ gilt für diese Punkte

$$x_{m_0-m+\mu} < t_\mu < x_{m_0+\mu} \quad \text{für } \mu = 0, \dots, m.$$

Nach Folgerung 3.10 gilt deswegen

$$B_m \begin{pmatrix} m_0-m & \dots & k-\bar{m}_k \\ t_0 & \dots & t_m^\vee \end{pmatrix} > 0,$$

sofern die t_μ höchstens zweimal auftreten. Da t beliebig in $(x_{m_0-m}, x_{k-\bar{m}_k+m})$ gewählt werden kann, bedeutet dies, daß entweder $s(x, \eta)$ keine von $z_0, \dots, z_{m-1}^\vee$ verschiedenen Nullstellen in $(x_{m_0-m}, x_{k-\bar{m}_k+m})$ besitzt und daß alle z_μ , die nur einmal auftreten, einfache Nullstellen sind oder $s(x, \eta) \equiv 0$ ist.

(Hier wurde benötigt, daß für $z_\mu = z_{\mu+1}$ für ein μ stets z_μ Nullstelle von $s(x, \eta)$ mit gerader Vielfachheit ist)

Falls $s(x, \eta) \not\equiv 0$ ist, gilt also $s(x, \eta) \not\equiv 0$ für alle

$x \in (\xi_m^\vee, x_{k-\bar{m}_k+m})$. Wir werden zeigen:

$$\varepsilon(-1)^{\sum_{m+v}^{\vee}} s(x, \eta) > 0 \quad \text{für alle } x \in (\xi_m^\vee, x_{k-\bar{m}_k+m})$$

Falls $s(\xi_m^\nu, \eta) \neq 0$ ist, ist dies erfüllt. Es sei also $s(\xi_m^\nu, \eta) = 0$ und

$$\varepsilon(-1)^{\tilde{m}+\nu} s(x, \eta) < 0 \text{ für alle } x \in (\xi_m^\nu, x_{k-\tilde{m}_k+m}).$$

Dann ist $z_{m-1}^\nu = \xi_m^\nu$. Wegen $z_{m-2}^\nu \in [\xi_{m-2}^\nu, \xi_{m-1}^\nu]$ tritt z_{m-1}^ν nur einmal auf und ist nach dem vorhin gezeigten eine einfache Nullstelle von $s(x, \eta)$. Damit ist

$$\varepsilon(-1)^{\tilde{m}+\nu} s(x, \eta) > 0 \text{ für alle } x \in (z_{m-2}^\nu, \xi_m^\nu).$$

Falls $s(\xi_{m-1}^\nu, \eta) \neq 0$ wäre, wäre wegen $z_{m-2}^\nu < \xi_{m-1}^\nu$

$$\varepsilon(-1)^{\tilde{m}-1+\nu} s(\xi_{m-1}^\nu, \eta) < 0 \text{ und damit ein Widerspruch}$$

zur Voraussetzung gegeben. Deshalb ist $z_{m-2}^\nu = \xi_{m-1}^\nu$

und z_{m-2}^ν ist wiederum einfache Nullstelle von $s(x, \eta)$.

Dies führe man bis zu ξ_0 durch. Da wir bereits $\tilde{m}$

Nullstellen $z_0 = \xi_1, \dots, z_{m-1}^\nu = \xi_m^\nu$ gefunden haben, ist

$s(\xi_0, \eta) \neq 0$. Da $s(x, \eta)$ in allen Punkten $\xi_1, \dots, \xi_m^\nu$

das Vorzeichen wechselt, gilt

$$\varepsilon(-1)^{0+\nu} s(\xi_0, \eta) < 0. \text{ Dies ist ein Widerspruch.}$$

$$\text{Also ist } \varepsilon(-1)^{\tilde{m}+\nu} s(x, \eta) > 0 \text{ für alle } x \in (\xi_m^\nu, x_{k-\tilde{m}_k+m}).$$

$s(x, \eta)$ ist eindeutig bestimmt durch die Nullstellen

$z_0, \dots, z_{m-1}^\nu$ und durch einen Funktionswert $s(t, \eta)$ mit

$t \notin \{z_0, \dots, z_{m-1}^\nu\}$. Deshalb gilt

$$\varepsilon(-1)^{\tilde{m}+\nu} s(x, \eta) = c_0 B_m^* \begin{pmatrix} m_0 - m & \dots & k - \tilde{m}_k \\ z_0 & \dots & z_{m-1}^\nu \end{pmatrix} x \quad \text{mit } c_0 > 0.$$

Dann erhält man den Koeffizienten von $B_{m, k-\bar{m}_k}$ durch Entwicklung nach der letzten Spalte zu

$$c_0 B_m^* \begin{pmatrix} m_0 - m & \dots & k - \bar{m}_k - 1 \\ z_0 & \dots & z_{m-1}^v \end{pmatrix}$$

Dieser ist wegen $(*)$ positiv.

Wegen $s(x, y) = \sum_{\mu=m_0-m}^{k-\bar{m}_k} \sum_{v=n_0-n}^{1-\bar{n}_1} \alpha_{\mu v} B_{n, v}(y) B_{m, \mu}(x)$ ist also

$$\epsilon(-1)^{\tilde{m}+v_0} \sum_{v=n_0-n}^{1-\bar{n}_1} \alpha_{k-\bar{m}_k, v} B_{n, v}(\eta) > 0.$$

Für $s(x, \eta) \equiv 0$ erhält man wegen der linearen Unabhängigkeit von $\{B_{m, \mu}(x)\}_{\mu=m_0-m, \dots, k-\bar{m}_k}$

$$\sum_{v=n_0-n}^{1-\bar{n}_1} \alpha_{k-\bar{m}_k, v} B_{n, v}(\eta) = 0 \text{ und damit stets}$$

$$\epsilon(-1)^{\tilde{m}+v_0} \sum_{v=n_0-n}^{1-\bar{n}_1} \alpha_{k-\bar{m}_k, v} B_{n, v}(\eta) \geq 0.$$

Also gilt für alle $\rho = 0, \dots, \tilde{n}$:

$$\epsilon(-1)^{\tilde{m}+\rho} \sum_{v=n_0-n}^{1-\bar{n}_1} \alpha_{k-\bar{m}_k, v} B_{n, v}(\eta_\rho) \geq 0$$

Die Funktion $\tilde{s}(y) = \sum_{v=n_0-n}^{1-\bar{n}_1} \alpha_{k-\bar{m}_k, v} B_{n, v}(y)$ besitzt

deshalb mindestens $\tilde{n}$ Nullstellen $\tilde{z}_{\rho-1} \in [\eta_{\rho-1}, \eta_\rho]$,

$\rho = 1, \dots, \tilde{n}$, mit folgender Eigenschaft:

Ist für ein ρ $\tilde{z}_\rho = \tilde{z}_{\rho+1}$, so besitzt $\tilde{s}(y)$ in $\tilde{z}_\rho$ eine Nullstelle gerader Vielfachheit.

Wegen $y_{n_0-n+\rho} < \eta_\rho < y_{n_0+\rho-1}$ für $\rho = 1, \dots, \tilde{n}$ ist

$y_{n_0-n+p-1} < \eta_{p-1} \leq \tilde{z}_{p-1} < \eta_p < y_{n_0+p-1}$ und damit

$y_{n_0-n+p} < \tilde{z}_p < y_{n_0+p}$ für $p = 0, \dots, \tilde{n}-1$.

Wegen $\alpha_{k-\bar{m}_k, 1-\bar{n}_1} = 0$ ist $\tilde{s}(y)$ eine Linearkombination von $B_{n, n_0-n}(y), \dots, B_{n, 1-\bar{n}_1-1}(y)$. Nach Folgerung 3.10

gilt $B_n^* \begin{pmatrix} n_0-n & \dots & 1-\bar{n}_1-1 \\ \tilde{z}_0 & \dots & \tilde{z}_{\tilde{n}-1} \end{pmatrix} > 0$. Deshalb ist $\tilde{s}(y) \equiv 0$.

Folglich ist

$$s(x, y) = \sum_{\mu=m_0-m}^{k-\bar{m}_k-1} \left(\sum_{v=n_0-n}^{1-\bar{n}_1} \alpha_{\mu v} B_{n, v}(y) \right) B_{m, \mu}(x).$$

$s(x, \eta_p)$ wird mit den Funktionen $B_{m, m_0-m}(x), \dots,$

$B_{m, k-\bar{m}_k-1}(x)$ gebildet und besitzt für $p = 0, \dots, \tilde{n}$

$\tilde{m}$ Nullstellen $z_{\mu, p}$ mit

$x_{m_0-m+\mu+1} < z_{\mu, p} < x_{m_0+\mu}$ für $\mu = 0, \dots, \tilde{m}-1$ mit der

zusätzlichen Eigenschaft:

Ist für ein Tupel (μ, p) $z_{\mu, p} = z_{\mu+1, p}$, so besitzt

$s(x, \eta_p)$ in $z_{\mu, p}$ eine Nullstelle gerader Vielfachheit.

Deshalb ist auch $s(x, \eta_p) \equiv 0$ für alle $p = 0, \dots, \tilde{n}$.

Daraus folgt:

$$\sum_{v=n_0-n}^{1-\bar{n}_1} \alpha_{\mu v} B_{n, v}(\eta_p) = 0 \quad \text{für } \mu = m_0-m, \dots, k-\bar{m}_k-1,$$

und $p = 0, \dots, \tilde{n}$

Wegen $y_{n_0-n+p} < \eta_p < y_{n_0+p-1}$ für $p = 0, \dots, \tilde{n}$ erhält

man nach Folgerung 3.10:

$$B_n \begin{pmatrix} n_0 - n & . & . & . & 1 - \bar{n}_1 \\ & n_0 & . & . & \eta_n^\lambda \end{pmatrix} > 0$$

Deshalb ist $a_{\mu\nu} = 0$ für $\mu = m_0 - m, \dots, k - \bar{m}_k - 1$
und $\nu = n_0 - n, \dots, 1 - \bar{n}_1$.

Im folgenden seien die vor Hilfssatz 3.19 eingeführten Beschränkungen gültig. Hilfssatz 3.19 liefert eine Eindeutigkeitsaussage.

3.20 Satz:

Für $f = s$ mit $f \in C(R)$ und $s \in V_{k,1}$ existiere ein Alternantengitter W mit $(\tilde{m}+1)(\tilde{n}+1)$ Punkten:

$$W = \bigcup_{v=0}^{\tilde{n}} \{ \xi_{0v}, \dots, \xi_{mv}^\lambda \} \times \{ \eta_v \} \text{ mit } \xi_{\rho v} < \xi_{\sigma v} \text{ für } \rho < \sigma \\ \text{und } \eta_\mu < \eta_\nu \text{ für } \mu < \nu.$$

Die Punkte von W mögen folgenden Bedingungen genügen:

$$x_{m_0 - m + \mu + 1} < \xi_{\mu v} < x_{m_0 + \mu - 1} \text{ für } \mu = 1, \dots, \tilde{m} - 1, v = 0, \dots, \tilde{n} \\ y_{n_0 - n + \rho} < \eta_\rho < y_{n_0 + \rho - 1} \text{ für } \rho = 1, \dots, \tilde{n}$$

Dann ist s eindeutige Minimallösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf R .

Beweis:

Nach Satz 1.14 ist s Minimallösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf R .

Falls ein $\tilde{s} \in V_{k,1}$ mit $||f - \tilde{s}||_R = ||f - s||_R$ existiert, gilt für die Punkte von W :

$$\epsilon(-1)^{\mu+\nu} (f-s)(\xi_{\mu\nu}, \eta_\nu) = ||f-s||_{R^+} \epsilon(-1)^{\mu+\nu} (f-\tilde{s})(\xi_{\mu\nu}, \eta_\nu)$$

und deshalb

$$\varepsilon(-1)^{\mu+\nu}(\tilde{s}-s)(\xi_{\mu\nu}, \eta_\nu) \geq 0 \quad \text{für } \mu = 0, \dots, \tilde{m}, \\ \nu = 0, \dots, \tilde{n}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Nach Hilfssatz 3.19 folgt $s \equiv \tilde{s}$.

3.21 Bemerkung:

Bei den Bedingungen für die $\xi_{\mu\nu}$ und die η_ν spielt auch der Index von x_0 bzw von y_0 eine Rolle. Falls $R = [x_s, x_t] \times [y_p, y_q]$ ist, erhält man als Bedingungen:

$$x_{-m+m_s+s+\mu+1} < \xi_{\mu\nu} < x_{m_s+s+\mu-1} \quad \text{für } \mu = 1, \dots, \tilde{m}-1. \\ \text{mit } \tilde{m} = t - \bar{m}_t + m - s - m_s$$

$$y_{-n+n_p+p+\rho} < \eta_\rho < x_{n_p+p+\rho-1} \quad \text{für } \rho = 1, \dots, \tilde{n} \\ \text{mit } \tilde{n} = q - \bar{n}_q + n - p - n_p$$

3.22 Satz:

Für $f = s$ mit $f \in C(R)$ und $s \in V_{k,1}$ existiere ein Alternantengitter W mit $(\tilde{m}+1)(\tilde{n}+1)$ Punkten, aber es existiere weder ein $u \in \{0, \dots, k\}$ mit $x_0 < x_u < x_k$ noch ein $v \in \{0, \dots, 1\}$ mit $y_0 < y_v < y_1$, so daß wenigstens eine der 4 folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- (i) Es existiert ein $\bar{y} \in [y_0, y_1]$, so daß $(f-s)(\cdot, \bar{y})$ eine Alternante mit $u - m_0 + m$ Punkten in $[x_0, x_u]$ besitzt
- (ii) Es existiert ein $\bar{y} \in [y_0, y_k]$, so daß $(f-s)(\cdot, \bar{y})$ eine Alternante mit $k - \bar{m}_k + m - u$ Punkten in

$[x_u, x_k]$ besitzt

(iii) In $[x_o, x_k] \times [y_o, y_v]$ hat $f - s$ ein Alternantengitter mit $(\tilde{m}+1)(v-n_o+n+1)$ Punkten

(iv) In $[x_o, x_k] \times [y_v, y_1]$ hat $f - s$ ein Alternantengitter mit $(\tilde{m}+1)(1-v+n-\bar{n}_1)$ Punkten

Dann ist s eindeutige Minimallösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf R .

Beweis:

Wir werden für die Punkte $(\xi_{\mu v}, \eta_v)$ von W zeigen:

Für $v = 0, \dots, \tilde{n}$ ist $\xi_{\mu v} < x_{m_o + \mu - 1}$, $\mu = 1, \dots, \tilde{m}-1$
und $x_{m_o + \mu - 1} < \xi_{\mu + m - 2, v}$, $\mu = 0, \dots, \tilde{m}-m+1$.

Für $\rho = 1, \dots, \tilde{n}$ ist $\eta_\rho < y_{n_o + \rho - 1}$ und

für $\rho = 0, \dots, \tilde{n}-n+1$ ist $y_{n_o + \rho - 1} < \eta_{\rho + n - 1}$.

Annahme: Es existiert ein Tupel $(\mu, v) \in \{1, \dots, \tilde{m}-1\} \times$

$\{0, \dots, \tilde{n}\}$ mit $x_{m_o + \mu - 1} \leq \xi_{\mu v}$

Dann ist für $\rho = \mu, \dots, \tilde{m}$ $\xi_{\rho v} \in [x_{m_o + \mu - 1}, x_k]$ und

$(f-s)(\cdot, \eta_v)$ besitzt in $[x_{m_o + \mu - 1}, x_k]$ eine Alternante mit $\tilde{m}-\mu+1 = k-\bar{m}_k+m-(m_o+\mu-1)$ Punkten, Dies ist ein Widerspruch.

Analog zeigt man, daß es kein Tupel $(\mu, v) \in \{0, \dots, \tilde{m}-m+1\} \times \{0, \dots, \tilde{n}\}$ mit $\xi_{\mu + m - 2, v} \leq x_{m_o + \mu - 1}$ gibt.

Genauso erhält man $\eta_\rho < y_{n_o + \rho - 1}$ für $\rho = 1, \dots, \tilde{n}$

und $y_{n_o + \rho - 1} < \eta_{\rho + n - 1}$ für $\rho = 0, \dots, \tilde{n}-n+1$.

Durch Umindizierung ergibt sich:

$$x_{m_0 - m + \mu + 1} < \xi_{\mu v} < x_{m_0 + \mu - 1}, \quad \mu = 1, \dots, \hat{m} - 1, \quad v = 0, \dots, \hat{n}$$

$$y_{n_0 - n + \rho} < \eta_{\rho} < y_{n_0 + \rho - 1}, \quad \rho = 1, \dots, \hat{n}$$

Nach Satz 3.20 ist s eindeutige Minimallösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf R .

Als nächstes zeigen wir, daß durch die Existenz eines Alternantengitters auf einem Teilrechteck von R unter bestimmten Bedingungen die Eindeutigkeit einer Minimal-
lösung gegeben ist.

3.23 Satz:

Für $f = s$ mit $f \in C(R)$ und $s \in V_{k,1}$ existiere auf

$$G = [x_u, x_k] \times [y_v, y_1], \quad x_0 < x_u < x_k, \quad y_0 < y_v < y_1,$$

ein Alternantengitter bzgl R mit $(m + (k - u) - \bar{m}_k - m_u + 1) \cdot$
 $(n + (1 - v) - \bar{n}_1 - n_v + 1)$ Punkten und der Eigenschaft:

$$x_{-m + m_u + u + \mu + 1} < \xi_{\mu v} < x_{m_u + u + \mu - 1}, \quad \mu = 1, \dots, \hat{m} - 1, \quad v = 0, \dots, \hat{n}$$

mit $\hat{m} = m + k - u - \bar{m}_k - m_u$
und $\hat{n} = n + 1 - v - \bar{n}_1 - n_v$

$$y_{-n + n_v + v + \rho} < \eta_{\rho} < y_{n_v + v + \rho - 1}, \quad \rho = 1, \dots, \hat{n}$$

Dann ist s eindeutige Minimallösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf R .

Beweis:

Nach Satz 3.17 ist s Minimallösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf R .

Da sich jedes $s \in V_{k,1}$ auf G durch

$$s(x,y) = \sum_{\mu=u+\bar{m}_k}^{k-\bar{m}_k} \sum_{v=v+\bar{n}_1}^{l-\bar{n}_1} \alpha_{\mu\nu} B_{m,\mu}(x) B_{n,\nu}(y) \text{ mit}$$

$\alpha_{k-\bar{m}_k, l-\bar{n}_1} = 0$ darstellen läßt, gilt für die Approximation von f bzgl $V_{k,1}$ auf G :

Nach Satz 3.20 ist s eindeutige Minimallösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf G .

Wegen $\|f-s\|_G = \|f-s\|_R$ ist s eindeutige Minimal-
lösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf R .

Satz 1.17 über die Abschätzung der Minimalabweichung
läßt sich folgendermaßen abwandeln.

3.24 Satz:

Es seien G , $\hat{m}$ und $\hat{n}$ wie in Satz 3.23 gegeben.

Für $f - s$ mit $f \in C(R)$ und $s \in V_{k,1}$ existiere in G
ein Punktegitter

$$W = \bigcup_{v=0}^{\hat{n}} \{ \xi_{0v}, \dots, \xi_{\hat{m}v} \} \times \{ \eta_v \} \text{ mit } \xi_{\rho v} < \xi_{\sigma v} \text{ für } \rho < \sigma$$

$$\text{und } \eta_\mu < \eta_\nu \text{ für } \mu < \nu$$

und es gebe $(\hat{m}+1)(\hat{n}+1)$ reelle Zahlen $m_{\mu\nu} > 0$ mit

$$(f-s)(\xi_{\mu\nu}, \eta_\nu) = \varepsilon (-1)^{\mu+\nu} m_{\mu\nu}, \quad \mu = 0, \dots, \hat{m}$$

$$\nu = 0, \dots, \hat{n}, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

Dann gilt: $\min_{\mu, \nu} m_{\mu\nu} \leq A_{k,1} \|f-s\|_R$

Beweis:

Annahme: Es existiert ein $\tilde{s} \in V_{k,1}$ mit $\|f-\tilde{s}\|_R < \min_{\mu, \nu} m_{\mu\nu}$

Dann ist für $\mu = 0, \dots, \hat{m}$, $v = 0, \dots, \hat{n}$ und $\varepsilon = \pm 1$:

$$\varepsilon (-1)^{\mu+v} (\tilde{s}-s) (\xi_{\mu v}, \eta_v) > 0$$

Wie im Beweis von Satz 3.17 gezeigt, ergibt sich daraus ein Widerspruch.

Wir beweisen nun einen Interpolationssatz für Splines aus $V_{k,1}$.

3.25 Satz:

Gegeben sei auf R ein Punktegitter

$$W = \bigcup_{v=0}^{\tilde{n}} \{ \xi_{0v}, \dots, \xi_{\tilde{m}v} \} \times \{ \eta_v \} \quad \text{mit } \xi_{\rho v} < \xi_{\sigma v} \text{ für } \rho < \sigma$$

$$\text{und } \eta_\mu < \eta_v \text{ für } \mu < v$$

und

$$x_{m_0 - m + \mu + 1} < \xi_{\mu v} < x_{m_0 + \mu - 1}, \quad \mu = 1, \dots, \tilde{m}-1, \quad v = 0, \dots, \tilde{n},$$

$$y_{n_0 - n + v} < \eta_v < y_{n_0 + v - 1}, \quad v = 1, \dots, \tilde{n}.$$

Dann existiert zu jedem Tupel $(\mu_0, v_0) \in \{0, \dots, \tilde{m}\} \times \{0, \dots, \tilde{n}\}$ und zu jeder Menge von $(\tilde{m}+1) \cdot (\tilde{n}+1) - 1$ reellen Zahlen $m_{\mu v}$, $(\mu, v) \neq (\mu_0, v_0)$ genau ein $s \in V_{k,1}$ mit

$$s(\xi_{\mu v}, \eta_v) = m_{\mu v}.$$

Beweis:

Es sei $s(\xi_{\mu v}, \eta_v) = 0$ für alle $(\mu, v) \neq (\mu_0, v_0)$.

Dann existiert ein nur von $s(\xi_{\mu_0 v_0}, \eta_{v_0})$ abhängiges

$\varepsilon = \pm 1$ mit

$$\varepsilon (-1)^{\mu+v} s(\xi_{\mu v}, \eta_v) \geq 0 \quad \text{für } \mu = 0, \dots, \tilde{m} \text{ und } v = 0, \dots, \tilde{n}.$$

Nach Hilfssatz 3.19 ist $s \equiv 0$.

Das homogene Interpolationsproblem ist also nur trivial lösbar. Deshalb besitzt das inhomogene Interpolationsproblem eine eindeutige Lösung.

3.26 Bemerkung:

Satz 3.25 wird direkt aus Hilfssatz 3.19 abgeleitet. Wir werden in Hilfssatz 5.1 eine verbesserte Interpolationseigenschaft für Funktionen aus $V_{k,1}$ beweisen.

Schließlich wollen wir unter Verwendung von Methoden, die in diesem Paragraphen eingeführt wurden, zeigen, daß zu jedem schwachen Markoff-System $M \subset C[\alpha, \beta]$ eine Familie parameterabhängiger Markoff-Systeme $M_t \subset C[\alpha, \beta]$ mit folgender Eigenschaft konstruiert werden kann:

Zu jedem $u \in M$ existiert eine Familie $\{u(\cdot, t)\}_{t \geq 0}$ mit $u(\cdot, t) \in M_t$ für $t > 0$ und $\|u(x) - u(x, t)\|_{[\gamma, \delta]} = o(1)$ für $t \rightarrow 0$, $\alpha < \gamma < \delta < \beta$.

Zunächst gilt:

3.27 Hilfssatz:

Es sei $M = \{u_0, u_1, \dots\} \subset C[\alpha, \beta]$ ein schwaches Markoff-System. Dann gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ein Tupel $\alpha \leq x_0 < \dots < x_m \leq \beta$ mit

$$U \begin{pmatrix} 0 & \dots & m \\ x_0 & \dots & x_m \end{pmatrix} > 0.$$

Beweis:

Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion.

Es sei $m = 0$. Dann folgt aus der linearen Unabhängigkeit von u_0 die Existenz eines $x_0 \in [\alpha, \beta]$ mit $u_0(x_0) > 0$.

Nun sei die Aussage für m bewiesen, dh. es existiert ein Tupel $\alpha \leq x_0 < \dots < x_m \leq \beta$ mit

$$U \begin{pmatrix} 0 & \dots & m \\ x_0 & \dots & x_m \end{pmatrix} > 0.$$

Dann existiert aber genau ein Tupel $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ mit

$$\sum_{\mu=0}^m \alpha_\mu u_\mu(x_\nu) = u_{m+1}(x_\nu), \quad \nu = 0, \dots, m.$$

Es sei $\bar{x} \in [\alpha, \beta]$, $\bar{x} \notin \{x_0, \dots, x_m\}$. Dann gilt:

$$U \begin{pmatrix} 0 & \dots & m+1 \\ x_0 & \dots & x_m & \bar{x} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u_0(x_0) & \dots & u_0(x_m) & u_0(\bar{x}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sum_{\mu=0}^m \alpha_\mu u_\mu(x_0) & \dots & \sum_{\mu=0}^m \alpha_\mu u_\mu(x_m) & u_{m+1}(\bar{x}) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} u_0(x_0) & \dots & u_0(\bar{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & u_{m+1}(\bar{x}) - \sum_{\mu=0}^m \alpha_\mu u_\mu(\bar{x}) \end{vmatrix}$$

Addition der letzten Zeile mit Vielfachen der ersten $m+1$ Zeilen

$$= U \begin{pmatrix} 0 & \dots & m \\ x_0 & \dots & x_m \end{pmatrix} (u_{m+1}(\bar{x}) - \sum_{\mu=0}^m \alpha_{\mu} u_{\mu}(\bar{x})).$$

Da $u_0, \dots, u_{m+1}$ linear unabhängig sind, existiert ein $\bar{x} \in [\alpha, \beta]$ mit

$$u_{m+1}(\bar{x}) + \sum_{\mu=0}^m \alpha_{\mu} u_{\mu}(\bar{x}) = 0. \text{ Damit ist der Hilfssatz bewiesen.}$$

3.28 Satz:

Zu jedem schwachen Markoff-System $M \subset C[\alpha, \beta]$ existiert eine Familie von Markoff-Systemen $M_t \subset C[\alpha, \beta]$ mit folgender Eigenschaft:

Zu $u \in M$ existiert eine Familie $\{u(\cdot, t)\}_{t \geq 0}$ mit $u(\cdot, t) \in M_t$ für $t > 0$ und $\|u(x, t) - u(x)\|_{[\gamma, \delta]} = o(1)$ für $t \rightarrow 0$, $\alpha < \gamma < \delta < \beta$.

Beweis:

Es sei $u \in M$. Wir bilden

$$\bar{u}(x) := \begin{cases} u(x) & x \in [\alpha, \beta] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt für die von einem $t > 0$ abhängige Funktion

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{2t}} \bar{u}(\xi) d\xi \quad \text{nach YOSIDA [17], S. 65:}$$

a) $u(\cdot, t) \in C[\alpha, \beta]$

b) $\|u(x, t) - u(x)\|_{[\gamma, \delta]} = o(1)$ für $t \rightarrow 0$ und für alle Intervalle $[\gamma, \delta]$ mit $\alpha < \gamma < \delta < \beta$.

Da in α und in β Unstetigkeitsstellen von $\bar{u}$ auftreten können, ist i.a. die gleichmäßige Konvergenz auf $[\alpha, \beta]$ nicht gegeben.

Nun folgt aus der basic composition formula (KARLIN [9],

S. 17) für alle Tupel $\alpha \leq x_0 < \dots < x_m \leq \beta$:

$$U_t \begin{pmatrix} 0 & \dots & m \\ x_0 & \dots & x_m \end{pmatrix} = \int_{\alpha \leq \xi_0 < \dots < \xi_m \leq \beta} \dots \int E \begin{pmatrix} \xi_0 & \dots & \xi_m \\ x_0 & \dots & x_m \end{pmatrix} \bar{U} \begin{pmatrix} 0 & \dots & m \\ \xi_0 & \dots & \xi_m \end{pmatrix} d\xi_0 \dots d\xi_m$$

(zur Definition der Determinanten sh. Def. 1.1 und 3.12)

Für $\mu = 0, \dots, m$ ist $u_\mu(\cdot, t)$ die Funktion, die zu $\bar{u}_\mu$ - wie zu Beginn dieses Beweises gezeigt - gebildet wird.

Es ist $u_\mu \in M$.

Der Integrand ist wegen der vor Hilfssatz 3.13 genannten Eigenschaften des GAUSSschen Kerns und der Voraussetzung, daß M ein schwaches Markoff-System ist, im Integrationsbereich stets nichtnegativ. Da

$E \begin{pmatrix} \xi_0 & \dots & \xi_m \\ x_0 & \dots & x_m \end{pmatrix}$ stets positiv ist und nach Hilfssatz 3.27

für ein Tupel $\alpha \leq \xi_0 < \dots < \xi_m \leq \beta$ $\bar{U} \begin{pmatrix} 0 & \dots & m \\ \xi_0 & \dots & \xi_m \end{pmatrix}$

positiv ist, folgt aus Stetigkeitsgründen die Existenz einer Teilmenge des Integrationsbereichs mit positivem

Maß. Deshalb ist für jede Wahl von $\alpha \leq x_0 < \dots < x_m \leq \beta$

$U_t \begin{pmatrix} 0 & . & . & . & m \\ x_0 & . & . & . & x_m \end{pmatrix} > 0$ und damit bildet

$M_t = \{u_0(x,t), u_1(x,t), . . . \}$ ein Markoff-System.

§ 4. Anwendungen auf spezielle Funktionen und Beispiele

Es seien die in § 3 eingeführten Knotenverteilungen auch in diesem Paragraphen gegeben. Außerdem sei stets $m \geq 2$, $n \geq 2$. $\tilde{m}$ und $\tilde{n}$ seien wie vor Hilfssatz 3.19 gegeben. Wir untersuchen zunächst, wie sich die Minimalabweichung $A_{k,1}$ bei der Approximation von speziellen Funktionen durch Splines aus $V_{k,1}$ abschätzen läßt und geben dann Beispiele für die Existenz eines Alternantengitters bzw einer Alternanten in R .

4.1 Approximation von Funktionen

$$F(x,y) = f(x) \cdot g(y) \quad \text{mit } f \in C[x_0, x_k] \text{ und } g \in C[y_0, y_1]$$

durch Splines aus $V_{k,1}$.

Es sei $h_1(x) = \sum_{\mu=m_0-\tilde{m}}^{k-\tilde{m}_k} \alpha_{\mu} B_{m,\mu}(x)$ eine Minimallösung für f bzgl des von den B-Splines $\{B_{m,m_0-\tilde{m}}(x), \dots, B_{m,k-\tilde{m}_k}(x)\}$ aufgespannten Raumes auf $[x_0, x_k]$ mit der Eigenschaft, daß $f - h_1$ in den Punkten $x_0 \leq \xi_0 < \dots < \xi_{\tilde{m}+1} \leq x_k$ eine Alternante bzgl $[x_0, x_k]$ besitzt und es sei

$$h_2(y) = \sum_{v=n_0-\tilde{n}}^{1-\tilde{n}_1} \beta_v B_{n,v}(y)$$

eine Minimallösung für g bzgl des von den B-Splines $\{B_{n,n_0-\tilde{n}}(y), \dots, B_{n,1-\tilde{n}_1}(y)\}$ aufgespannten Raumes auf $[y_0, y_1]$.

Die Existenz einer Minimallösung h_1 mit der zusätzlichen Eigenschaft folgt nach BARRAR, LOEB [1] und SCHUMAKER [13].

Nun sei $f \notin h_1$. Falls $\max_{\substack{n \\ q(n)=h_2(n)}} |q(n)| \neq 0$ ist, gilt

folgende Abschätzung:

$$A_{k,1} \geq \max_{\substack{n \\ q(n)=h_2(n)}} |q(n)| \|f-h_1\|_{[x_0, x_k]}$$

Dies läßt sich folgendermaßen zeigen:

Es sei $\max_{\substack{n \\ q(n)=h_2(n)}} |q(n)| = \epsilon q(\tilde{n}) > 0$, $\epsilon = \pm 1$.

Falls ein $s \in V_{k,1}$ mit $\|F-s\|_R < \epsilon q(\tilde{n}) \|f-h_1\|_{[x_0, x_k]}$ existiert, ist

$$\tilde{\epsilon}(-1)^\mu q(\tilde{n}) (f(\xi_\mu) - h_1(\xi_\mu)) > \tilde{\epsilon}(-1)^\mu (f(\xi_\mu) q(\tilde{n}) - s(\xi_\mu, \tilde{n}))$$

und damit

$$\tilde{\epsilon}(-1)^\mu (s(\xi_\mu, \tilde{n}) - h_1(\xi_\mu) q(\tilde{n})) > 0 \quad \text{für } \mu = 0, \dots, \tilde{m}+1, \tilde{\epsilon} = \pm 1.$$

Der Spline $s(x, \tilde{n}) - h_1(x) q(\tilde{n})$ besitzt also mindestens $\tilde{m}+1$ Vorzeichenwechsel. Dies ist ein Widerspruch zu einem Satz von KARLIN [9], wonach dieser Spline höchstens $\tilde{m}$ Vorzeichenwechsel besitzen kann.

Nun sei eine Minimallösung h_2 für q bzgl des von den B-Splines $\{B_{n, n_0-n}(y), \dots, B_{n, 1-\bar{n}_1-1}(y)\}$ aufgespannten Raumes auf $[y_0, y_1]$ gegeben. Dann ist $h_1 h_2 \in V_{k,1}$.

Es sei wiederum $\max_{\substack{n \\ q(n)=h_2(n)}} |q(n)| = \epsilon q(\tilde{n}) > 0$, $\epsilon = \pm 1$.

Gilt nun

$|f(x)g(y) - h_1(x)h_2(y)| \leq \epsilon \alpha(\tilde{n}) \|f - h_1\| [x_0, x_k]$ für alle $(x, y) \in R$, so besitzt $F(x, \tilde{n}) = h_1(x)h_2(\tilde{n})$ eine Alternante in den Punkten $\xi_0, \dots, \xi_{m+1}^v$ und nach Satz 1.10 ist $h_1 h_2$ Minimallösung für F bzgl $V_{k,1}$ auf R .

Falls g ein Element des von $\{B_{n, n_0 - n}(y), \dots, B_{n, 1 - \bar{n}_1 - 1}(y)\}$ aufgespannten Raumes ist, ist $h_1 g$ eine Minimallösung für F bzgl $V_{k,1}$ auf R . Dies zeigt man ebenfalls mit Satz 1.10.

4.2 Beispiel für das Vorliegen eines Alternantengitters mit genau $(\tilde{m}+1)(\tilde{n}+1)$ Punkten

Man wähle 2 Knotenverteilungen

$$\dots x_{-1} \leq x_0 < x_1 \leq \dots \text{ und } \dots y_{-1} \leq y_0 < y_1 \leq \dots$$

mit $x_0 = -1, x_1, x_2 \in (-1, 1), x_3 = 1$ und

$$y_0 = -1, y_1, y_2 \in (-1, 1), y_3 = 1.$$

Man bilde $f(x, y) = T_m(x) T_n(y)$, wobei T_m bzw T_n das Tschebyscheff-Polynom vom Grad m bzw vom Grad n darstellt.

f besitzt in $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$ ein Alternantengitter in den Punkten $(\cos \frac{\mu\pi}{m}, \cos \frac{\nu\pi}{n})$, $\mu = 0, \dots, m$, $\nu = 0, \dots, n$. Deshalb ist nach Satz 1.14 $s(x, y) \equiv 0$ Minimallösung für f auf R bzgl des Raumes

$$V_{3,3} = \{s | s(x, y) = \sum_{\mu=2-m}^2 \sum_{\nu=2-n}^2 \alpha_{\mu\nu} B_{m-1, \mu}(x) B_{n-1, \nu}(y), \alpha_{22} = 0\}.$$

Nach Satz 3.20 läßt sich außerdem bei geeigneter Wahl der Knoten x_1 und x_2 bzw y_1 und y_2 die Eindeutigkeit

der Minimallösung beweisen: Dazu sei $m \geq 4$, $n \geq 4$.

Man wähle die Knoten x_1, x_2, y_1, y_2 mit

$$x_{3-m+u} < \cos \frac{u\pi}{m} < x_u \text{ für } u = 1, \dots, m-1 \text{ und}$$

$$y_{2-n+v} < \cos \frac{v\pi}{n} < y_v \text{ für } v = 1, \dots, n.$$

Nach Satz 3.20 ist O die einzige Minimallösung.

Bei mehr als 4 Knoten x_0, x_1, x_2, x_3 bzw bei mehr als 4 Knoten y_0, y_1, y_2, y_3 müßte das Alternantengitter von f mehr als $(m+1)(n+1)$ Punkte besitzen, um Aussagen über die Minimalität von f machen zu können.

Hier hilft Satz 3.17 weiter: Wählt man $k+1+2$ einfache Knoten

$$-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k = 1 \text{ und}$$

$$-1 = y_0 < y_1 < \dots < y_{l-1} < y_l = 1$$

zB so, daß für ein Tupel $(u,v) \in \{k-2, k-1\} \times \{l-2, l-1\}$

$x_u < \cos \frac{\pi}{m}$ und $y_v < \cos \frac{\pi}{n}$ erfüllt ist, so besitzt f in

$G = [x_u, x_k] \times [y_v, y_l]$ ein Alternantengitter mit $m \times n$

Punkten. Nach Satz 3.17 folgt sofort, daß O Minimallösung

für f bzgl $V_{k,l}$ auf R ist, wobei $V_{k,l}$ in diesem Fall

durch B-Splines der Ordnung $m-1$ und der Ordnung $n-1$

gebildet wird. .

4.3 a) Anwendung von Satz 3.24 zur Abschätzung der

Minimalabweichung

$$\text{Es sei } f(x,y) = x^2 y^2 - \frac{7}{8}$$

Wir approximieren f durch Elemente $s \in V_{2,2}$ mit $m = 2$,

$n = 2$ auf $R = [-1,1] \times [-1,1]$. Die dazu nötigen Knoten

seien durch

$$x_{-1} = -2, x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2 \text{ und}$$

$$y_{-1} = -2, y_0 = -1, y_1 = 0, y_2 = 1, y_3 = 2$$

gegeben.

Für die Funktion

$$\begin{aligned} s(x,y) = & -B_{-1}(x)B_0(y) - B_0(x)B_{-1}(y) - \frac{3}{4} B_0(x)B_0(y) - \\ & - B_0(x)B_1(y) - B_1(x)B_0(y) \end{aligned}$$

gilt:

$$f(0,0) - s(0,0) = -\frac{1}{8}, \quad f(1,0) - s(1,0) = \frac{1}{8},$$

$$f(0,1) - s(0,1) = \frac{1}{8}, \quad f\left(\frac{1}{2},1\right) - s\left(\frac{1}{2},1\right) = -\frac{1}{8}$$

Die 4 Punkte $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ und $(\frac{1}{2},1)$ bilden in $G = [0,1] \times [0,1]$ ein Punktegitter der Art, wie es in Satz 3.24 benötigt wird. Deshalb gilt:

$$0.125 \leq A_{2,2}$$

Wegen $s(x,y) = s(x,-y)$ und $s(x,y) = s(-x,y)$ ist $s(x,y) = s(-x,-y)$ und $s(x,y)$ durch Angabe in G bereits eindeutig in R festgelegt. In G erhält man für $f - s$ ein globales Extremum bei $(0.6600058\dots, 0.6600058\dots)$. An diesem Punkt hat $f - s$ den Wert $0.14975264\dots$

Deswegen gilt

$$|f(x,y) - s(x,y)| \leq 0.14975264\dots \text{ für alle } (x,y) \in R$$

und

$$0.125 \leq A_{2,2} \leq 0.14975264\dots$$

b) Vergleich mit der Approximation von f durch Polynome
in 2 Variablen

Bei der Approximation von $f(x,y)$ durch Elemente

$$s(x,y) = \sum_{\mu=0}^2 \sum_{\nu=0}^2 \alpha_{\mu\nu} x^{\mu} y^{\nu}, \quad \alpha_{22} = 0,$$

erhält man als Minimallösung

$$\tilde{s}(x,y) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 - \frac{9}{8}.$$

Es ist nämlich

$$x^2 y^2 - \frac{7}{8} - \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 - \frac{9}{8} \right) = \frac{1}{4} T_2(x) \cdot T_2(y)$$

und $\frac{1}{4} T_2(x), T_2(y)$ besitzt ein Alternantengitter aus
3 x 3 Punkten in $(\cos \frac{\mu\pi}{2}, \cos \frac{\nu\pi}{2})$, $\mu, \nu = 0, 1, 2$.

Nach EHLICH, HAUSSMANN [5] ist $\tilde{s}$ Minimallösung für f
auf R und es gilt $\|f - \tilde{s}\|_R = 0.25$.

c) Approximation von f auf einer halbdiskreten Teil-
menge von R

Man setze $\eta_0 = y_0 = -1$, $\eta_1 = y_1 = 0$, $\eta_2 = y_2 = 1$

$$\text{und } T = \bigcup_{\nu=0}^2 [-1, 1] x(\eta_{\nu}).$$

Es sei $s(x,y)$ die in a) eingeführte Funktion aus $V_{2,2}$.

Dann existiert ein Punktegitter mit 9 Punkten $(\xi_{\mu\nu}, \eta_{\nu})$,
 $\mu, \nu = 0, 1, 2$,

$$\xi_{00} = \xi_{02} = -\frac{1}{2}, \quad \xi_{10} = \xi_{11} = \xi_{12} = 0, \quad \xi_{20} = \xi_{22} = \frac{1}{2},$$

$$\xi_{01} = -1, \quad \xi_{21} = 1,$$

und folgender Eigenschaft:

$$f(\xi_{\mu\nu}, \eta_\nu) - s(\xi_{\mu\nu}, \eta_\nu) = (-1)^{\mu+\nu+1} \frac{1}{8} = ||f-s||_T, \mu, \nu = 0, 1, 2$$

Nach Satz 1.14 und Bemerkung 1.18 ist s Minimallösung
für f bzgl $V_{2,2}$ auf T .

§ 5. Notwendige Bedingungen bei der Approximation durch Splines aus $V_{k,1}$ auf halbdiskreten Mengen

Es seien die in § 3 eingeführten Knotenverteilungen mit den vor Hilfssatz 3.19 stehenden Einschränkungen gegeben. Wir wählen weiterhin die Bezeichnungen

$$\begin{aligned}\tilde{m} &= m - m_0 + k - \bar{m}_k \\ \tilde{n} &= n - n_0 + 1 - \bar{n}_1.\end{aligned}$$

Für $\tilde{n} + 1$ verschiedene, in ansteigender Form geordnete Zahlen $\{\eta_\rho\}_{\rho=0, \dots, \tilde{n}}$ sei

$$y_{n_0-n+\rho} < \eta_\rho < y_{n_0+\rho-1} \quad \text{für } \rho = 1, \dots, \tilde{n} \text{ erfüllt.}$$

$$\text{Es sei } T := \bigcup_{\rho=0}^{\tilde{n}} [x_0, x_k] \times \{\eta_\rho\}.$$

Nun sei $s_0 \in V_{k,1}$ eine Minimallösung für $f \in C(T)$ bzgl $V_{k,1}$ auf T . Wir werden zunächst zeigen, daß $f - s_0$ stets ein Alternantengitter mit $m(\tilde{n}+1)$ Punkten oder eine Alternante mit $m + 1$ Punkten auf T besitzt. Dies verbessert die Aussage von Satz 2.5, ohne daß man die Voraussetzungen des Satzes braucht.

Anschließend behandeln wir das Approximationsproblem mit Splines aus $V_{k,1}$ mit einfachen Knoten. Wir werden zeigen, daß aus der Eindeutigkeit einer Minimallösung s_0 für f bzgl $V_{k,1}$ auf T die Existenz von Alternanten bzw von Alternantengittern für $f - s_0$ auf T folgt. STRAUSS [15] hat solche notwendigen Bedingungen für eindimensionale Spline-

Approximation gefunden.

Zunächst benötigen wir zwei Hilfssätze, die sich mit der Interpolation durch Elemente aus $V_{k,1}$ beschäftigen.

5.1 Hilfssatz:

Es sei $v_0 \in \{0, \dots, \tilde{n}\}$ gegeben. Für jedes $\rho \neq v_0$ seien $\tilde{m} + 1$ verschiedene Zahlen $\{\xi_{\mu\rho}\}_{\mu=0, \dots, \tilde{m}}$ durch

$$x_{\mu+m_0-m} < \xi_{\mu\rho} < x_{\mu+m_0} \quad \text{für } \mu = 0, \dots, \tilde{m} \quad \text{gegeben.}$$

Außerdem seien $\tilde{m}$ verschiedene Zahlen $\{\xi_\mu\}_{\mu=0, \dots, \tilde{m}-1}$ durch

$$x_{\mu+1+m_0-m} < \xi_\mu < x_{\mu+m_0} \quad \text{für } \mu = 0, \dots, \tilde{m}-1 \quad \text{gegeben.}$$

Dann existiert zu jedem $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, genau ein $s \in V_{k,1}$

mit $s(\xi_{\mu\rho}, \eta_\rho) = 0$, $\rho \neq v_0$, $\mu = 0, \dots, \tilde{m}$

$$s(\xi_\mu, \eta_{v_0}) = 0, \mu = 0, \dots, \tilde{m}-2$$

$$s(\xi_{\tilde{m}-1}^\sim, \eta_{v_0}) = c$$

und mit folgenden Eigenschaften:

$$s(x, \eta_\rho) \equiv 0 \quad \text{für } \rho \neq v_0$$

$$s(x, \eta_{v_0}) = 0 \quad \text{für } x \geq x_{\tilde{m}+m-1}^\sim$$

$s(x, \eta_{v_0})$ besitzt in $(x_{m_0-m}, x_{\tilde{m}+m-1}^\sim)$ nur die Nullstellen $\xi_0, \dots, \xi_{\tilde{m}-2}^\sim$. Diese sind einfach.

Beweis:

Wir zeigen, daß das homogene Interpolationsproblem nur

die triviale Lösung $s \equiv 0$ besitzt.

Wegen $s(\xi_{\mu\rho}, \eta_\rho) = 0$ für $\rho \neq \nu_0$ und

$x_{\mu+m_0-m} < \xi_{\mu\rho} < x_{\mu+m_0}$ für $\mu = 0, \dots, \tilde{m}$ ist nach Fol-

gerung 3.10

$$s(x, \eta_\rho) = \sum_{\mu=m_0-m}^{k-\bar{m}_k} \sum_{\lambda=n_0-n}^{1-\bar{n}_1} \alpha_{\mu\lambda} B_{n,\lambda}(\eta_\rho) B_{m,\mu}(x) \equiv 0 \text{ und damit}$$

$$\sum_{\lambda=n_0-n}^{1-\bar{n}_1} \alpha_{\mu\lambda} B_{n,\lambda}(\eta_\rho) = 0 \text{ für } \mu = m_0-m, \dots, k-\bar{m}_k.$$

Insbesondere ist $\sum_{\lambda=n_0-n}^{1-\bar{n}_1} \alpha_{k-\bar{m}_k,\lambda} B_{n,\lambda}(\eta_\rho) = 0$. Wegen

$$\alpha_{k-\bar{m}_k, 1-\bar{n}_1} = 0 \text{ und } y_{n_0-n+\rho} < \eta_\rho < y_{n_0+\rho-1} \text{ für } \rho = 1, \dots, \tilde{n}$$

ist nach Folgerung 3.10

$$\sum_{\lambda=n_0-n}^{1-\bar{n}_1-1} \alpha_{k-\bar{m}_k,\lambda} B_{n,\lambda}(y) \equiv 0 \text{ und deshalb}$$

$$\alpha_{k-\bar{m}_k, n_0-n} = \dots = \alpha_{k-\bar{m}_k, 1-\bar{n}_1-1} = 0.$$

Damit wird

$$s(x, \eta_{\nu_0}) = \sum_{\mu=m_0-m}^{k-\bar{m}_k-1} \sum_{\lambda=n_0-n}^{1-\bar{n}_1} \alpha_{\mu\lambda} B_{n,\lambda}(\eta_{\nu_0}) B_{m,\mu}(x).$$

Da wir $s(\xi_\mu, \eta_{\nu_0}) = 0$ für $\mu = 0, \dots, \tilde{m}-1$ wählen, ist we-

gen $x_{\mu+1+m_0-m} < \xi_\mu < x_{\mu+m_0}$ für $\mu = 0, \dots, \tilde{m}-1$ und Fol-

gerung 3.10 $s(x, \eta_{\nu_0}) \equiv 0$.

Deshalb ist $\sum_{\lambda=n_0-n}^{1-\bar{n}_1} \alpha_{\mu\lambda} B_{n,\lambda}(\eta_\rho) = 0$ für $\rho = 0, \dots, \tilde{n}$

und wiederum nach Folgerung 3.10

$$\sum_{\lambda=n_0-n}^{1-\bar{n}_1} \alpha_{\mu\lambda} B_{n,\lambda}(y) \equiv 0 \text{ für } \mu = m_0-m, \dots, k-\bar{m}_k-1.$$

Daraus ergibt sich $\alpha_{\mu\lambda} = 0$ für $\mu = m_0 - m, \dots, k - \bar{m}_k - 1$
 $\lambda = n_0 - n, \dots, 1 - \bar{n}_1$.

Also ist die Interpolationsaufgabe eindeutig lösbar.

Nun sei s das Element aus $V_{k,1}$, für das

$$s(\xi_{\mu\rho}, \eta_\rho) = 0, \quad \rho \neq v_0, \quad \mu = 0, \dots, \bar{m},$$

$$s(\xi_\mu, \eta_{v_0}) = 0, \quad \mu = 0, \dots, \bar{m}-2 \quad \text{und} \quad s(\xi_{\bar{m}-1}, \eta_{v_0}) = c \neq 0$$

gilt. Wie schon gezeigt, ist $s(x, \eta_\rho) \equiv 0$ für $\rho \neq v_0$.

Außerdem wurde gezeigt, daß

$$s(x, \eta_{v_0}) = \sum_{\mu=m_0-m}^{k-\bar{m}_k-1} \sum_{\lambda=n_0-n}^{1-\bar{n}_1} \alpha_{\mu\lambda} B_{n,\lambda}(\eta_{v_0}) B_{m,\mu}(x) \text{ ist.}$$

Deshalb ist $s(x, \eta_{v_0}) = 0$ für $x \geq x_{\bar{m}+m_0-1}$.

Nun sei ξ eine weitere Nullstelle von $s(x, \eta_{v_0})$ in

$(x_{m_0-m}, x_{\bar{m}+m_0-1})$ mit $\xi_{i_0} \leq \xi \leq \xi_{i_0+1}$. Wir bilden

$$\xi_\mu = \begin{cases} \xi_\mu & \mu = 0, \dots, i_0 \\ \xi & \mu = i_0 + 1 \\ \xi_{\mu-1} & \mu = i_0 + 2, \dots, \bar{m}-1 \end{cases}$$

Dann gilt: $x_{\mu+m_0-m} < \xi_\mu < x_{\mu+m_0}$ für $\mu = 0, \dots, \bar{m}-1$

Nach Folgerung 3.10 folgt deshalb $s(x, \eta_{v_0}) \equiv 0$. Dies

ist ein Widerspruch zu $s(\xi_{\bar{m}-1}, \eta_{v_0}) = c \neq 0$. Also be-

sitzt $s(x, \eta_{v_0})$ nur die einfachen Nullstellen $\xi_0, \dots, \xi_{\bar{m}-2}$.

5.2 Hilfssatz:

Es seien $v, v+1 \in \{0, \dots, \tilde{n}\}$. Für jedes $\rho \neq v, v+1$ seien $\tilde{m} + 1$ verschiedene Zahlen $\{\xi_{\mu\rho}\}_{\mu=0, \dots, \tilde{m}}$ durch

$x_{\mu+m_0-m} < \xi_{\mu\rho} < x_{\mu+m_0}$ für $\mu = 0, \dots, \tilde{m}$ gegeben. Außerdem seien $\tilde{m} + 1$ verschiedene Zahlen $\{\xi_{\mu v}\}_{\mu=0, \dots, \tilde{m}}$ durch

$x_{\mu+1+m_0-m} < \xi_{\mu v} < x_{\mu+m_0}$ für $\mu = 0, \dots, \tilde{m}$ und $\tilde{m}$ verschiedene Zahlen $\{\xi_{\mu, v+1}\}_{\mu=0, \dots, \tilde{m}-1}$ durch

$x_{\mu+1+m_0-m} < \xi_{\mu, v+1} < x_{\mu+m_0}$ für $\mu = 0, \dots, \tilde{m}-1$ gegeben.

Dann existiert zu jedem $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, genau ein $s \in V_{k,1}$ mit

$$s(\xi_{\mu\rho}, \eta_\rho) = 0, \mu = 0, \dots, \tilde{m}, \rho \neq v, v+1$$

$$s(\xi_{\mu v}, \eta_v) = 0, \mu = 0, \dots, \tilde{m}-1$$

$$s(\xi_{\tilde{m}, v}^\vee, \eta_v) = c$$

$$s(\xi_{\mu, v+1}, \eta_{v+1}) = 0, \mu = 0, \dots, \tilde{m}-1.$$

s erfüllt außerdem folgende Bedingungen:

$$s(x, \eta_\rho) \equiv 0 \text{ für } \rho \neq v, v+1$$

$s(x, \eta_v)$ und $s(x, \eta_{v+1})$ besitzen in $(x_{m_0-m}, x_{\tilde{m}+m_0}^\vee)$ nur die Nullstellen $\xi_{0v}, \dots, \xi_{\tilde{m}-1, v}^\vee$ bzw. $\xi_{0, v+1}, \dots, \xi_{\tilde{m}-1, v+1}^\vee$. Diese sind einfach.

Für $z \in (\xi_{\tilde{m}-1, v}^\vee, x_{\tilde{m}+m_0}^\vee)$, $z' \in (\xi_{\tilde{m}-1, v+1}^\vee, x_{\tilde{m}+m_0}^\vee)$ ist $\operatorname{sgn} s(z, \eta_v) = \operatorname{sgn} s(z', \eta_{v+1})$.

Beweis:

Die Existenz von genau einem $s \in V_{k,1}$ mit den Interpolationsbedingungen folgt unter Verwendung des Beweises von Hilfssatz 5.1. Danach ergibt sich außerdem

$$s(x, \eta_\rho) \equiv 0 \quad \text{für } \rho \neq v, v+1.$$

Genauso erhält man unter Verwendung dieses Beweises, daß

$s(x, \eta_v)$ bzw. $s(x, \eta_{v+1})$ in $(x_{m_0-m}, x_{m+m_0}^v)$ nur die einfachen Nullstellen $\xi_{0v}, \dots, \xi_{m-1,v}$ bzw. $\xi_{0,v+1}, \dots, \xi_{m-1,v+1}$ besitzen. Dazu benötigt man, daß

$$\sum_{\lambda=n_0-n}^{1-\bar{n}_1-1} a_{k-\bar{m}_k, \lambda} B_{n, \lambda}(\eta_\rho) \neq 0 \quad \text{für } \rho = v, v+1 \text{ ist. Denn}$$

andernfalls wäre wegen $y_{n_0-n+\rho} < \eta_\rho < y_{n_0+\rho-1}$ für

$\rho = 1, \dots, \tilde{n}$ und wegen

$$\sum_{\lambda=n_0-n}^{1-\bar{n}_1-1} a_{k-\bar{m}_k, \lambda} B_{n, \lambda}(\eta_\rho) = 0 \quad \text{für } \rho = 0, \dots, \tilde{n}, \rho \neq v, v+1$$

nach Folgerung 3.10

$$\sum_{\lambda=n_0-n}^{1-\bar{n}_1-1} a_{k-\bar{m}_k, \lambda} B_{n, \lambda}(y) \equiv 0 \quad \text{und damit}$$

$$a_{k-\bar{m}_k, n_0-n} = \dots = a_{k-\bar{m}_k, 1-\bar{n}_1-1} = 0.$$

$$\text{Dann wäre } s(x, y) = \sum_{\mu=m_0-m}^{k-\bar{m}_k-1} \sum_{\lambda=n_0-n}^{1-\bar{n}_1-1} a_{\mu\lambda} B_{n, \lambda}(y) B_{m, \mu}(x)$$

und wegen $s(\xi_{\mu v}, \eta_v) = 0$ für $\mu = 0, \dots, \tilde{m}-1$ und

$x_{\mu+1+m_0-m} < \xi_{\mu v} < x_{\mu+m_0}$ für $\mu = 0, \dots, \tilde{m}-1$ nach Fol-

gerung 3.10 $s(x, \eta_v) \equiv 0$ im Widerspruch zur Konstruktion von s .

Wir zeigen nun:

$$\operatorname{sgn} \left(\sum_{\lambda=n_0-n}^{1-\bar{n}_1-1} a_{k-\bar{m}_k, \lambda}^{B_{n, \lambda}(\eta_v)} \right) = \operatorname{sgn} \left(\sum_{\lambda=n_0-n}^{1-\bar{n}_1-1} a_{k-\bar{m}_k, \lambda}^{B_{n, \lambda}(\eta_{v+1})} \right)$$

Wäre das Gegenteil erfüllt, so besäße

$$\sum_{\lambda=n_0-n}^{1-\bar{n}_1-1} a_{k-\bar{m}_k, \lambda}^{B_{n, \lambda}(\eta)} \quad \text{außer den Nullstellen } \eta_\rho,$$

$$\rho = 0, \dots, \hat{n}, \quad \rho \neq v, v+1 \quad \text{noch eine weitere } \bar{n} \in (\eta_v, \eta_{v+1}).$$

Dies führt unter Verwendung von Folgerung 3.10 wiederum

$$\text{zu } \sum_{\lambda=n_0-n}^{1-\bar{n}_1-1} a_{k-\bar{m}_k, \lambda}^{B_{n, \lambda}(\eta)} \equiv 0 \quad \text{und damit zum Widerspruch.}$$

$$\text{Wir zeigen nun, daß } \operatorname{sgn} s(x, \eta_\rho) = \operatorname{sgn} \left(\sum_{\lambda=n_0-n}^{1-\bar{n}_1-1} a_{k-\bar{m}_k, \lambda}^{B_{n, \lambda}(\eta_\rho)} \right)$$

für $x > \xi_{m-1, \rho}^\lambda$, $\rho = v, v+1$ gilt.

Es ist

$$\begin{aligned} s(x, \eta_\rho) &= c_\rho \begin{vmatrix} B_{m, m_0-\bar{m}}(\xi_{0\rho}) & \dots & B_{m, m_0-\bar{m}}(\xi_{m-1, \rho}^\lambda) & B_{m, m_0-\bar{m}}(x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ B_{m, k-\bar{m}_k}(\xi_{0\rho}) & \dots & B_{m, k-\bar{m}_k}(\xi_{m-1, \rho}^\lambda) & B_{m, k-\bar{m}_k}(x) \end{vmatrix} \\ &= c_\rho B_m^* \begin{pmatrix} m_0-\bar{m} & \dots & k-\bar{m}_k \\ \xi_{0\rho} & \dots & \xi_{m-1, \rho}^\lambda & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Entwicklung nach der letzten Spalte ergibt:

$$s(x, \eta_\rho) = \sum_{\mu=m_0-\bar{m}}^{k-\bar{m}_k-1} \beta_{\mu\rho} B_{m, \mu}(x) + c_\rho B_m \begin{pmatrix} m_0-\bar{m} & \dots & k-\bar{m}_k-1 \\ \xi_{0\rho} & \dots & \xi_{m-1, \rho}^\lambda \end{pmatrix} B_{m, k-\bar{m}_k}(x)$$

Nach Folgerung 3.10 ist für $\xi_{m-1,\rho}^{\lambda} < x < x_{k-\bar{m}_k+m}$

$$B_m \begin{pmatrix} m_0 - m & \dots & k - \bar{m}_k \\ \xi_{0\rho} & \dots & \xi_{m-1,\rho}^{\lambda} & x \end{pmatrix} > 0 \quad \text{und deshalb ist}$$

$$\operatorname{sgn} s(x, \eta_\rho) = \operatorname{sgn} c_\rho \quad \text{für} \quad \xi_{m-1,\rho}^{\lambda} < x < x_{k-\bar{m}_k+m}.$$

Da außerdem

$$c_\rho B_m \begin{pmatrix} m_0 - m & \dots & k - \bar{m}_k - 1 \\ \xi_{0\rho} & \dots & \xi_{m-1,\rho}^{\lambda} \end{pmatrix} = \frac{1 - \bar{n}_1 - 1}{\sum_{\lambda=n_0}^1} a_{k-\bar{m}_k, \lambda}^{B_{n, \lambda}(\eta_\rho)}$$

ist, gilt deshalb für $z \in (\xi_{m-1,\nu}^{\lambda}, x_{m+m_0}^{\lambda})$, $z' \in (\xi_{m-1,\nu+1}^{\lambda}, x_{m+m_0}^{\lambda})$:

$$\operatorname{sgn} s(z, \eta_\nu) = \operatorname{sgn} c_\nu = \operatorname{sgn} \left(c_\nu B_m \begin{pmatrix} m_0 - m & \dots & k - \bar{m}_k - 1 \\ \xi_{0\nu} & \dots & \xi_{m-1,\nu}^{\lambda} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \operatorname{sgn} \left(\frac{1 - \bar{n}_1 - 1}{\sum_{\lambda=n_0}^1} a_{k-\bar{m}_k, \lambda}^{B_{n, \lambda}(\eta_\nu)} \right)$$

$$= \operatorname{sgn} \left(\frac{1 - \bar{n}_1 - 1}{\sum_{\lambda=n_0}^1} a_{k-\bar{m}_k, \lambda}^{B_{n, \lambda}(\eta_{\nu+1})} \right)$$

$$= \operatorname{sgn} c_{\nu+1} = \operatorname{sgn} s(z', \eta_{\nu+1})$$

Wir werden nun drei weitere Hilfssätze beweisen, die sich analog zu drei Hilfssätzen von EHLICH, HAUSSMANN [5] durchführen lassen. Die Sätze dienen dazu, für eine Fehlerfunktion $f = s_0$, $s_0 \in V_{k,1}$, die Existenz eines Mindestalternantenquitters bzw einer Mindestalternanten in T nachzuweisen.

Dazu führen wir folgende Bezeichnungen ein:

Für $v \in \{0, \dots, \tilde{n}\}$ sei $\|f\|_v := \max_{x \in [x_0, x_k]} |f(x, \eta_v)|$

Es seien

$$\begin{aligned} \tilde{x}_0 &:= x_{m_0-m}, \tilde{x}_1 := x_{m_0-m+1}, \dots, \tilde{x}_{m-1} := x_{m_0-1}, \\ \tilde{x}_m &:= x_{k-\bar{m}_k+1}, \tilde{x}_{m+1} := x_{k-\bar{m}_k+2}, \dots, \tilde{x}_{2m-1} := x_{k-\bar{m}_k+m}. \end{aligned}$$

Es sei $\tilde{B}_{m,0}(x) = \tilde{B}_{m,0}(x; \tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_m)$ der B-Spline, der zu den Knoten $\tilde{x}_0, \dots, \tilde{x}_m$

$\tilde{B}_{m,1}(x) = B_{m,1}(x; \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{m+1})$ der B-Spline, der zu den Knoten $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{m+1}$ gehört usw und schließlich

$\tilde{B}_{m,m-1}(x) = \tilde{B}_{m,m-1}(x; \tilde{x}_{m-1}, \dots, \tilde{x}_{2m-1})$ der B-Spline, der zu den Knoten $\tilde{x}_{m-1}, \dots, \tilde{x}_{2m-1}$ gehört.

Es sei

$$\tilde{V} := \{s | s(x, y) = \sum_{\mu=0}^{m-1} \sum_{\lambda=n_0-n}^{1-\bar{n}_1} \alpha_{\mu\lambda} B_{n,\lambda}(y) \tilde{B}_{m,\mu}(x), \alpha_{m-1,1-\bar{n}_1} = 0\}.$$

Wegen

$$\tilde{B}_{m,\lambda}(x) = \sum_{\mu=m_0-m+\lambda}^{k-\bar{m}_k+1-m+\lambda} \beta_{\mu} B_{m,\mu}(x), \lambda = 0, \dots, m-1 \text{ und}$$

$$\alpha_{m-1,1-\bar{n}_1} = 0 \text{ ist } \tilde{V} \subset V_{k,1}.$$

5.3 Hilfssatz:

Es sei $f \in C(T)$ und $s_0 \in V_{k,1}$. Es gebe Zahlen

$v_0, v_1 \in \{0, \dots, \tilde{n}\}$ mit

$$a) \quad \|f - s_0\|_{v_0} < \|f - s_0\|_{v_1}$$

b) $(f-s_0)(\cdot, \eta_{v_1})$ besitze eine Alternante mit den Punkten $\xi_1, \dots, \xi_m$ in $[x_0, x_k]$, jedoch keine mit $m+1$ Punkten.

Dann gibt es ein $s \in V_{k,1}$ mit

$$||f-s_0-s||_{v_0} < ||f-s_0||_T$$

$$||f-s_0-s||_{v_1} < ||f-s_0||_T$$

$$||f-s_0-s||_T \leq ||f-s_0||_T$$

Beweis:

Es existieren $m-1$ Zahlen $\tau_1, \dots, \tau_{m-1}$ in (x_0, x_k) und ein $\epsilon > 0$ mit

$$\eta(-1)^\mu (f-s_0)(x, \eta_{v_1}) \leq ||f-s_0||_T - \epsilon \quad \text{für } x \in [\tau_{\mu-1}, \tau_\mu],$$

$\mu = 1, \dots, m$, $\eta = \pm 1$, wobei $\tau_0 = x_0$ und $\tau_m = x_k$ ist.

Wir interpolieren durch Elemente aus $\hat{V}$ auf folgendem Punktegitter:

$$\rho \neq v_0, v_1: \tilde{x}_\mu < t_{\mu\rho} < \tilde{x}_{\mu+m}, \mu = 0, \dots, m-1$$

$$\rho = v_1: t_{\mu, v_1} = \tau_\mu, \mu = 1, \dots, m-1$$

$$\tilde{x}_m < t_{m, v_1} < \tilde{x}_{2m-1}$$

$$\rho = v_0: \tilde{x}_{\mu+1} < t_{\mu, v_0} < \tilde{x}_{\mu+m}, \mu = 0, \dots, m-2$$

Nach Hilfssatz 5.2 existiert genau ein $s \in \hat{V}$ mit

$$s(t_{\mu\rho}, \eta_\rho) = 0, \mu = 0, \dots, m-1, \rho \neq v_0, v_1$$

$$s(t_{\mu, v_0}, \eta_{v_0}) = 0, \mu = 0, \dots, m-2$$

$$s(t_{\mu, v_1}, \eta_{v_1}) = 0, \mu = 1, \dots, m-1$$

$$s(t_{m,v_1}, \eta_{v_1}) = \operatorname{sgn} (f-s_0)(\xi_m, \eta_{v_1}).$$

s besitzt folgende Eigenschaften:

- a) $s(x, \eta_\rho) \equiv 0$ für $\rho \neq v_0, v_1$
- b) $s(x, \eta_{v_1})$ besitzt in $(\tilde{x}_0, \tilde{x}_{2m-1})$ genau die Nullstellen $\tau_1, \dots, \tau_{m-1}$. Diese sind einfach.

Wegen des Vorzeichens von $s(t_{m,v_1}, \eta_{v_1})$ gilt:

$$\eta(-1)^{\mu+1} s(x, \eta_{v_1}) \geq 0 \quad \text{für } x \in [\tau_{\mu-1}, \tau_\mu], \quad \mu = 1, \dots, m.$$

Dann existiert aber ein $c_1 > 0$ mit

$$||f-s_0-cs||_{v_1} < ||f-s_0||_T \quad \text{für } 0 < c < c_1.$$

Da $||f-s_0||_{v_0} < ||f-s_0||_T$ ist, existiert ein $c_2 > 0$

mit $0 < c_2 < c_1$ und $||f-s_0-c_2s||_{v_0} < ||f-s_0||_T$. Da

$c_2s \neq 0$ in T und $c_2s \in V_{k,1}$ ist, erfüllt dieser Spline die geforderten Bedingungen.

5.4 Hilfssatz:

Es sei $f \in C(T)$ und $s_0 \in V_{k,1}$. Es gebe ein $v_0 \in \{0, \dots, \tilde{n}\}$,

so daß $(f-s_0)(\cdot, \eta_{v_0})$ in $[x_0, x_k]$ höchstens $m-1$

alternierende Extrempunkte besitzt. Dann gibt es ein

$s \in V_{k,1}$ mit

$$||f-s_0-s||_{v_0} < ||f-s_0||_T$$

$$||f-s_0-s||_T \leq ||f-s_0||_T.$$

Beweis:

$(f-s_0)(\cdot, \eta_{v_0})$ besitze $r \leq m-1$ alternierende Extre-
malpunkte $\xi_1, \dots, \xi_r$ in $[x_0, x_k]$.

Falls $r = 0$ ist, kann man unter Verwendung von Hilfssatz
5.1 ein $s \in \hat{V}$ finden mit

$$s(x, \eta_\rho) \equiv 0 \text{ f\"ur } \rho \neq v_0 \text{ und } s(x, \eta_{v_0}) = c \hat{B}_{m,0}(x).$$

F\"ur ein bestimmtes c erf\"ullt dieser Spline die gefor-
derten Bedingungen.

Nun sei $r \geq 1$, Dann gibt es Punkte $\tau_1, \dots, \tau_{r-1}$ und
ein $\epsilon > 0$ mit

$$\eta(-1)^\mu (f-s_0)(x, \eta_{v_0}) \leq \|f-s_0\|_T - \epsilon \text{ f\"ur } x \in [\tau_{\mu-1}, \tau_\mu],$$

$$\mu = 1, \dots, r, \text{ wobei } \tau_0 = x_0 \text{ und } \tau_r = x_k \text{ ist.}$$

Der Fall $r=1$ ist dabei zugelassen.

Wir unterscheiden nun folgende F\"alle:

x_0 und x_k sind beide nicht Extrempunkte von

$(f-s_0)(\cdot, \eta_{v_0})$ bzw. x_0 und x_k sind Extrempunkte von
 $(f-s_0)(\cdot, \eta_{v_0})$

Fall 1: oBdA sei x_0 kein Extrempunkt von $(f-s_0)(\cdot, \eta_{v_0})$

Es sei $I_\delta = [x_0, x_0 + \delta]$ mit

$$|(f-s_0)(x, \eta_{v_0})| < \|f-s_0\|_T \text{ f\"ur } x \in I_\delta.$$

Wir w\"ahlen in I_δ $m-r-1$ verschiedene Punkte

$\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_{m-r-1}$. Dann konstruieren wir ein $s \in \hat{V}$ bzgl des

folgenden Punktegitters:

$$\rho \neq v_0: \hat{x}_\mu < t_{\mu\rho} < \hat{x}_{\mu+m}, \mu = 0, \dots, m-1$$

$$\rho = v_0: \bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_{m-r-1}, \tau_1, \dots, \tau_{r-1}, z \in (\tau_{r-1}, x_k).$$

Nach Hilfssatz 5.1 existiert genau ein $s \in \hat{V}$ mit

$$s(t_{\mu\rho}, \eta_\rho) = 0, \mu = 0, \dots, m-1, \rho \neq v_0$$

$$s(\bar{\tau}_\mu, \eta_{v_0}) = 0, \mu = 1, \dots, m-r-1$$

$$s(\tau_\mu, \eta_{v_0}) = 0, \mu = 1, \dots, r-1$$

$$s(z, \eta_{v_0}) = \operatorname{sgn}(f-s_0)(\xi_r, \eta_{v_0}).$$

Es ist $s(x, \eta_\rho) \equiv 0$ für $\rho \neq v_0$ und $s(x, \eta_{v_0})$ besitzt nur die oben angegebenen Nullstellen in $(\hat{x}_0^0, \hat{x}_{2m-2}^0)$.

Diese sind einfach.

$$\text{Nun ist } \eta(-1)^{\mu+1} s(x, \eta_{v_0}) \geq 0 \text{ für } x \in [\tau_{\mu-1}, \tau_\mu],$$

$\mu = 1, \dots, r$, wobei in diesem Fall $\tau_0 = x_0 + \delta$ ist. Dann

existiert aber ein $c_1 > 0$ mit

$$|(f-s_0-cs)(x, \eta_{v_0})| < \|f-s_0\|_T \text{ für } x \in [x_0, x_k] \setminus I_\delta \text{ und}$$

$$0 < c < c_1. \text{ Da } |(f-s_0)(x, \eta_{v_0})| < \|f-s_0\|_T \text{ für}$$

$x \in I_\delta$ gilt, existiert ein c_2 mit $0 < c_2 < c_1$ und

$$|(f-s_0-c_2s)(x, \eta_{v_0})| < \|f-s_0\|_T \text{ für } x \in I_\delta.$$

Wegen $s(x, \eta_\rho) \equiv 0$ für $\rho \neq v_0$ folgt also

$$\|f-s_0-c_2s\|_{v_0} < \|f-s_0\|_T \text{ und}$$

$$\|f-s_0-c_2s\|_T \leq \|f-s_0\|_T.$$

Da $c_2 s \in V_{k,1}$ ist, ist für diesen Fall alles bewiesen.

Fall 2: x_0 und x_k sind Extrempunkte von $(f-s_0)(\cdot, \eta_{v_0})$

Dann wählen wir $I_\delta = [\tau_1 - \delta, \tau_1 - \frac{\delta}{2}]$ mit

$$|(f-s_0)(x, \eta_{v_0})| < \|f-s_0\|_T \quad \text{für } x \in I_\delta.$$

Es sei $\bar{r} = \begin{cases} m-r-1 & \text{falls } m-r-1 \text{ gerade} \\ m-r-2 & \text{falls } m-r-1 \text{ ungerade} \end{cases}$

In I_δ wählen wir $\bar{r}$ verschiedene Punkte $\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_{\bar{r}}$.

Wir interpolieren durch Elemente aus $\hat{V}$ für $\rho \neq v_0$

an den in Fall 1 eingeführten Punkten $\{t_{\mu\rho}\}_{\mu=0, \dots, m-1}$

und für $\rho = v_0$ an den Punkten $\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_{\bar{r}}, \tau_1, \dots, \tau_{r-1}, x_0$

und, falls $m-r-1$ ungerade ist, außerdem an x_k .

Nach Hilfssatz 5.1 existiert genau ein $s \in \hat{V}$ mit

$$s(t_{\mu\rho}, \eta_\rho) = 0, \quad \mu = 0, \dots, m-1, \quad \rho \neq v_0$$

$$s(\bar{\tau}_\mu, \eta_{v_0}) = 0, \quad \mu = 1, \dots, \bar{r}$$

$$s(\tau_\mu, \eta_{v_0}) = 0, \quad \mu = 1, \dots, r-1$$

$$(*) \quad s(x_0, \eta_{v_0}) = \operatorname{sgn} (f-s_0)(x_0, \eta_{v_0})$$

und, falls $m-r-1$ ungerade ist,

$$(**) \quad s(x_k, \eta_{v_0}) = \operatorname{sgn} (f-s_0)(x_k, \eta_{v_0}).$$

Falls $m-r-1$ gerade ist, besitzt $s(x, \eta_{v_0})$ in $[x_0, x_k]$

nur die Nullstellen $\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_{\bar{r}}, \tau_1, \dots, \tau_{r-1}$. Diese sind

einfach. Ist $m-r-1$ ungerade, so hätte $s(x, \eta_{v_0})$ mit

jeder weiteren Nullstelle wegen $(*)$ und $(**)$ sogar

noch zwei weitere Nullstellen in $[x_0, x_k]$. Da $s(x, \eta_{v_0}) \neq 0$ in $[x_0, x_k]$ ist, ist dies wegen Folgerung 3.10 nicht möglich.

Deshalb existiert wie im 1. Fall ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$\|f - s_0 - cs\|_{v_0} < \|f - s_0\|_T \quad \text{und}$$

$$\|f - s_0 - cs\|_T \leq \|f - s_0\|_T.$$

Da $cs \in V_{k,1}$ ist, ist alles gezeigt.

5.5 Hilfssatz:

Es sei $f \in C(T)$ und $s_0 \in V_{k,1}$. Gibt es zwei Zahlen $v, v+1 \in \{0, \dots, \tilde{n}\}$ und $2m$ Punkte $\{\xi_{\mu\rho}\}_{\mu=0, \dots, m-1, \rho=v, v+1}$ in $[x_0, x_k]$ mit

$$\eta(-1)^{\mu} (f - s_0)(\xi_{\mu\rho}, \eta_{\rho}) = \|f - s_0\|_T \quad \text{für } \mu = 0, \dots, m-1,$$

$\rho = v, v+1$, $\eta = \pm 1$, so existiert ein $s \in V_{k,1}$ mit

$$\|f - s_0 - s\|_{\rho} < \|f - s_0\|_T \quad \text{für } \rho = v, v+1 \quad \text{und}$$

$$\|f - s_0 - s\|_T \leq \|f - s_0\|_T.$$

Beweis:

Es existieren $2(m-1)$ Punkte $\{\tau_{\mu\rho}\}_{\mu=1, \dots, m-1, \rho=v, v+1}$

und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\eta(-1)^{\mu+1} (f - s_0)(x, \eta_{\rho}) \leq \|f - s_0\|_T - \varepsilon \quad \text{für } x \in [\tau_{\mu-1, \rho}, \tau_{\mu\rho}],$$

$\mu = 1, \dots, m$, wobei $\tau_{0\rho} = x_0$ und $\tau_{m\rho} = x_k$ für

$\rho = v, v+1$ gilt.

Wir interpolieren durch Elemente aus $\hat{V}$ an folgendem Punktegitter:

$$\rho \neq v, v+1: \quad \tilde{x}_\mu < t_{\mu\rho} < \tilde{x}_{\mu+m}, \quad \mu = 0, \dots, m-1$$

$$\rho = v: \quad t_{\mu v} = \tau_{\mu v}, \quad \mu = 1, \dots, m-1$$

$$\tilde{x}_m < t_{mv} < \tilde{x}_{2m-1}$$

$$\rho = v+1: \quad t_{\mu, v+1} = \tau_{\mu, v+1}, \quad \mu = 1, \dots, m-1$$

Nach Hilfssatz 5.2 existiert genau ein $s \in \hat{V}$ mit

$$s(t_{\mu\rho}, \eta_\rho) = 0, \quad \mu = 0, \dots, m-1, \quad \rho \neq v, v+1$$

$$s(t_{\mu v}, \eta_v) = 0, \quad \mu = 1, \dots, m-1$$

$$s(t_{mv}, \eta_v) = \operatorname{sgn}(f-s_0)(\xi_{m-1, v}, \eta_v)$$

$$s(t_{\mu, v+1}, \eta_{v+1}) = 0, \quad \mu = 1, \dots, m-1.$$

Dieses s erfüllt außerdem folgende Bedingungen:

- a) $s(x, \eta_\rho) \equiv 0$ für $\rho \neq v, v+1$
- b) $s(x, \eta_v)$ bzw. $s(x, \eta_{v+1})$ besitzen in $(\tilde{x}_0, \tilde{x}_{2m-1})$ nur die Nullstellen $t_{1v}, \dots, t_{m-1, v}$ bzw. $t_{1, v+1}, \dots, t_{m-1, v+1}$. Diese sind einfach.
- c) Für $z \in (\xi_{m-1, v}, \tilde{x}_{2m-1})$ und $z' \in (\xi_{m-1, v+1}, \tilde{x}_{2m-1})$ gilt: $\operatorname{sgn} s(z, \eta_v) = \operatorname{sgn} s(z', \eta_{v+1})$

Insbesondere folgt aus (c):

$$\operatorname{sgn}(f-s_0)(\xi_{m-1, v}, \eta_v) = \operatorname{sgn} s(z, \eta_v) = \operatorname{sgn} s(z', \eta_{v+1})$$

Also gilt:

$$\eta(-1)^{\mu} s(x, \eta_\rho) \geq 0 \quad \text{für } x \in [\tau_{\mu-1, \rho}, \tau_{\mu\rho}], \quad \rho = v, v+1,$$

$$\mu = 1, \dots, m.$$

Wegen $\hat{x}_0 = x_{m_0-m} < x_0 < x_k < x_{k-m_k+m} = \hat{x}_{2m-1}$ ist
 $s(x, n_\rho) \neq 0$ für $x = x_0$ und $x = x_k$, $\rho = v, v+1$.
 (Dies ist wichtig für den Fall, daß $(f-s_0)(x, n_\rho)$ in
 x_0 bzw. in x_k Extrempunkte besitzt).

Dann existiert aber ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$||f-s_0-cs||_\rho < ||f-s_0||_T \quad \text{für } \rho = v, v+1 \quad \text{und}$$

$$||f-s_0-cs||_T \leq ||f-s_0||_T.$$

Für den nächsten Satz verwenden wir folgende von EHLICH,
 HAUSSMANN [5] eingeführte Bezeichnungen:

Für $f \in C(T)$ und $s_0 \in V_{k,1}$ sei $\Delta = f - s_0$.

$$\Gamma = \{0, \dots, \hat{n}\}$$

$$\Gamma'_\Delta = \{v \in \Gamma \mid (f-s_0)(\cdot, n_v) \text{ besitzt genau } m \text{ alternierende} \\ \text{Extrempunkte in } [x_0, x_k]\}$$

$$\Gamma''_\Delta = \{v \in \Gamma \mid ||f-s_0||_v < ||f-s_0||_T\}$$

$$\Gamma'''_\Delta = \{v \in \Gamma \mid (f-s_0)(\cdot, n_v) \text{ besitzt höchstens } m-1 \text{ alternierende} \\ \text{Extrempunkte in } [x_0, x_k]\}$$

5.6 Satz:

Es sei $f \in C(T)$ und $s_0 \in V_{k,1}$ sei Minimallösung für f
 bzgl. $V_{k,1}$ auf T . Dann gilt mindestens eine der fol-
 genden Bedingungen:

- (i) Es existiert ein $v_0 \in T$, so daß $(f-s_0)(\cdot, \eta_{v_0})$ mindestens $m+1$ alternierende Extremalpunkte in $[x_0, x_k]$ besitzt
- (ii) $f-s_0$ besitzt in T ein Alternantengitter mit $m(n+1)$ Punkten

Beweis:

Wenn (i) erfüllt ist, ist der Satz bewiesen.

Wenn (i) nicht gilt, ist $\Gamma = \Gamma'_\Delta \cup \Gamma''_\Delta \cup \Gamma'''_\Delta$.

Es sei $\Gamma'_\Delta \neq \emptyset$. Dann findet man nach wiederholter Anwendung von Hilfssatz 5.3 ein $s_1 \in V_{k,1}$ mit

$$\|f-s_0-s_1\|_v < \|f-s_0\|_T \quad \text{für } v \in \Gamma'_\Delta \cup \Gamma''_\Delta \quad \text{und}$$

$$\|s_1\|_v = 0 \quad \text{für } v \in \Gamma'''_\Delta.$$

Falls außerdem $\Gamma'''_\Delta \neq \emptyset$ ist, finden wir nach wiederholter Anwendung von Hilfssatz 5.4 ein $s_2 \in V_{k,1}$ mit

$$\|f-s_0-s_2\|_v < \|f-s_0\|_T \quad \text{für } v \in \Gamma'''_\Delta \quad \text{und}$$

$$\|s_2\|_v = 0 \quad \text{für } v \in \Gamma'_\Delta \cup \Gamma''_\Delta.$$

Dann ist $s_0 + s_1 + s_2$ eine bessere Approximation für f bzgl. $V_{k,1}$ auf T als s_0 .

Für $\Gamma'_\Delta = \emptyset$ und $\Gamma'''_\Delta \neq \emptyset$ findet man ein $s_3 \in V_{k,1}$ mit

$$\|f-s_0-s_3\|_v < \|f-s_0\|_T \quad \text{für } v \in \Gamma'''_\Delta \quad \text{und}$$

$$\|f-s_0-s_3\|_T = \|f-s_0\|_T.$$

Wir bilden für $\bar{\Delta} = f - s_0 - s_3$ $\Gamma'_\Delta, \Gamma''_\Delta, \Gamma'''_\Delta$. Dann ist

$r_{\Delta}^{\perp} \neq 0$ und das obige Verfahren für $f - s_0$ wird auf $f - s_0 - s_3$ angewendet.

Derletzte Fall ist $r_{\Delta}' = r$. Dann hat $f - s_0$ entweder ein Alternantengitter mit $m \cdot \tilde{n}$ Punkten in T oder es gibt zwei Zahlen $v, v+1 \in r$ und $2m$ Punkte $\{\varepsilon_{\mu\rho}\}_{\mu=0, \dots, m-1}$ mit $\rho=v, v+1$

$$\eta(-1)^{\mu}(f-s_0)(\varepsilon_{\mu\rho}, \eta_{\rho}) = ||f-s_0||_T.$$

Nach Hilfssatz 5.5 existiert ein $s \in V_{k,1}$ mit

$$||f-s_0-s||_{\rho} < ||f-s_0||_T \quad \text{für } \rho = v, v+1 \quad \text{und}$$

$$||f-s_0-s||_T = ||f-s_0||_T.$$

Dann ist für $\bar{\Delta} = f - s_0 - s$ $r_{\bar{\Delta}}^{\perp} \neq 0$ und man kann wie im ersten Teil dieses Beweises ein $\tilde{s} \in V_{k,1}$ mit

$$||f-s_0-s-\tilde{s}||_T < ||f-s_0-s||_T = ||f-s_0||_T \quad \text{finden.}$$

Im folgenden seien die in § 3 eingeführten Knoten einfach. Alle anderen Bedingungen werden beibehalten.

Wir werden zeigen, daß die Eindeutigkeit einer Minimal-
lösung $s_0 \in V_{k,1}$ für $f \in C(T)$ bzgl $V_{k,1}$ auf T die Existenz
von Alternanten für $f - s_0$ auf Teilmengen von T zur Folge
hat. Damit wird ein Ergebnis übertragen, das STRAUSS [15]
für eindimensionale Splines gefunden hat.

Für eine Punktmenge $H = \{h_\mu\}_{\mu=1, \dots, r}$ aus $[x_0, x_k]$ sei

$$H_{\mu, \nu} = \{h \in H \mid h \in (x_\mu, x_\nu)\}.$$

STRAUSS [16] beweist folgenden Hilfssatz:

5.7 Hilfssatz:

Gegeben sei eine Punktmenge $H = \{h_\mu\}_{\mu=1, \dots, r}$ in (x_0, x_k) mit $r \leq k - m$. Dann existiert ein Intervall $[x_u, x_{u+v}] \subset [x_0, x_k]$ mit $v \geq m$, so daß entweder

- (i) $H_{u, u+v} = \emptyset$ ist oder
- (ii) es gibt, falls $H_{u, u+v} = \{\tau_\mu\}_{\mu=1, \dots, h}$ ist, eine Teilmenge von Knoten $\{z_\mu\}_{\mu=0, \dots, m+h} \subset \{x_\mu\}_{\mu=u, \dots, u+v}$ mit $\tau_\mu \in (z_\mu, z_{\mu+m-1})$ für $\mu = 1, \dots, h$.

Unter Verwendung des Induktionsbeweises von STRAUSS erhält man

5.8 Hilfssatz:

Gegeben sei eine Punktmenge $H = \{h_\mu\}_{\mu=1, \dots, r}$ in (x_0, x_k) mit $r \leq k - m$. Dann existiert entweder

- (i) ein Intervall $[x_u, x_{u+m}] \subset [x_0, x_k]$ mit $H_{u, u+m} = \emptyset$ oder
- (ii) ein Intervall $[x_u, x_{u+m+h}] \subset [x_0, x_k]$ mit $H_{u, u+m+h} = \{\tau_\mu\}_{\mu=1, \dots, h}$ und $\tau_\mu \in (x_{u+\mu}, x_{u+\mu+m-1})$ für $\mu = 1, \dots, h$.

5.9 Satz:

Es sei s_0 die einzige Minimallösung für f bzgl $V_{k,1}$ auf T . Dann besitzt $f - s_0$ in jeder Teilmenge $[x_0, x_j] \times \{\eta_v\}$, $j = 1, \dots, k$, von T mindestens $j + 1$ und in jeder Teilmenge $[x_j, x_k] \times \{\eta_v\}$, $j = 1, \dots, k-2$, von T mindestens $k - j$ alternierende Extremalpunkte.

Falls $k > m$ ist, besitzt $f - s_0$ in jeder Teilmenge $[x_1, x_{i+j+m-1}] \times \{\eta_v\}$, $j \geq 1$, von T mindestens $j + 1$ alternierende Extremalpunkte.

Beweis:

Zunächst sei $k > m$ und es existiere eine Teilmenge

$[x_1, x_{i+j+m-1}] \times \{\eta_{v_0}\}$ von T , in der $f - s_0$ nur $1 \leq j$ alternierende Extremalpunkte $\xi_1, \dots, \xi_l$ besitzt.

Dann gibt es $l - 1$ verschiedene Punkte $t_1, \dots, t_{l-1}$ in $(x_1, x_{i+j+m-1})$ und ein $\epsilon > 0$ mit

$$\eta(-1)^u (f - s_0)(x, \eta_{v_0}) \leq \|f - s_0\|_T - \epsilon \quad \text{für } x \in [t_{u-1}, t_u],$$

$u = 1, \dots, l$, $\eta = \pm 1$, wobei $t_0 = x_1$ und $t_l = x_{i+j+m-1}$ ist.

Nach Hilfssatz 5.8 existiert nun entweder ein Intervall $[x_u, x_{u+m}] \subset [x_1, x_{i+j+m-1}]$ mit $H_{u,u+m} = \emptyset$ oder es gibt ein Intervall $[x_u, x_{u+m+h}] \subset [x_1, x_{i+j+m-1}]$ mit

$$H_{u,u+m+h} = \{t_\mu \in (x_u, x_{u+m+h}), \mu = 1, \dots, l-1\} = \{\tau_\mu\}_{\mu=1, \dots, h}$$

und $\tau_\mu \in (x_{u+\mu}, x_{u+\mu+1})$, $\mu = 1, \dots, h$.

Wir konstruieren nun einen Spline aus dem Raum

$$V: = \{s \mid s(x, y) = \sum_{\mu=u}^{u+h+1} \sum_{\lambda=1-n}^{l-1} \alpha_{\mu\lambda} B_{n,\lambda}(y) B_{m,\mu}(x), \alpha_{u+h+1, l-1} = 0\}.$$

Dabei ist stets der Fall $h = 0$ zugelassen.

Für $\rho \neq v_0$ wählen wir jeweils $h + 2$ verschiedene

Punkte $\{t_{\mu\rho}\}_{\mu=0, \dots, h+1}$ mit

$$x_{u+\mu} < t_{\mu\rho} < x_{u+\mu+m} \quad \text{für } \mu = 0, \dots, h+1.$$

Nach Hilfssatz 5.1 existiert genau ein $s \in \hat{V}$ mit

$$s(t_{\mu\rho}, \eta_\rho) = 0, \quad \rho \neq v_0, \quad \mu = 0, \dots, h+1$$

$$s(\tau_\mu, \eta_{v_0}) = 0, \quad \mu = 1, \dots, h$$

$$s(z, \eta_{v_0}) = \operatorname{sgn}(f - s_0)(\xi_s, \eta_{v_0}),$$

wobei für $h \neq 0$ $z \in (\tau_h, x_{u+m+h})$ und

$$\xi_s = \min \{\xi_\mu \mid \tau_h < \xi_\mu, \mu = 1, \dots, l\} \text{ sei.}$$

Für $h = 0$ sei $z \in (x_u, x_{u+m})$. Falls es unter den Punkten

$\xi_1, \dots, \xi_l$ einen Punkt in $[x_u, x_{u+m}]$ gibt, sei dieser ξ_s .

Andernfalls sei

$$\xi_s \in \{x \mid x \in [x_u, x_{u+m}], |(f - s_0)(x, \eta_{v_0})| = \max_{x \in [x_u, x_{u+m}]} |(f - s_0)(x, \eta_{v_0})|\}.$$

Ist aber $(f - s_0)(x, \eta_{v_0}) \equiv 0$ für $x \in [x_u, x_{u+m}]$, so

setzen wir $s(z, \eta_{v_0}) = 1$.

Für dieses s gilt nach Hilfssatz 5.1:

a) $s(x, \eta_\rho) \equiv 0$ für $\rho \neq v_0$

b) $s(x, \eta_{v_0})$ besitzt nur die Nullstellen $\tau_1, \dots, \tau_h$ in (x_u, x_{u+m+h}) . Diese sind einfach

c) $s(x, \eta_{v_0}) = 0$ für $x \geq x_{u+m+h}$

Wegen $\tilde{\eta}(-1)^{\mu}(f-s_0)(x, \eta_{v_0}) \leq \|f-s_0\|_T - \varepsilon$ für

$x \in [\tau_{\mu-1}, \tau_{\mu}]$, $\mu = 1, \dots, h+1$, $\tilde{\eta} = \pm 1$, wobei $\tau_0 = x_u$

und $\tau_{h+1} = x_{u+m+h}$ ist, und wegen der Wahl des Vorzeichens von s gilt:

$\tilde{\eta}(-1)^{\mu+1}s(x, \eta_{v_0}) \geq 0$ für $x \in [\tau_{\mu-1}, \tau_{\mu}]$, $\mu = 1, \dots, h+1$.

Deshalb existiert ein $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$ mit

$$\|f-s_0-cs\|_T \leq \|f-s_0\|_T.$$

Da $x_{u+h+1} < x_{u+h+m} \leq x_{1+j+m-1} \leq x_k$ ist, ist $\hat{V} \subset V_{k,1}$ und deshalb auch $s_0 + cs \in V_{k,1}$.

s_0 ist also nicht die einzige Minimallösung für f bzgl. $V_{k,1}$ auf T .

Nun sei eine Teilmenge $[x_0, x_j] \times \{\eta_{v_0}\}$, $j = 1, \dots, k$ von T gegeben, so daß $(f-s_0)(\cdot, \eta_{v_0})$ nur $1 \leq j$ alternierende Extrempunkte in $[x_0, x_j]$ besitzt.

Wir betrachten das Intervall $[x_{1-m}, x_j]$. Wie im ersten Teil des Beweises gezeigt wurde, existiert ein Teilintervall $[x_u, x_{u+m+h}]$ von $[x_{1-m}, x_j]$ mit $h \geq 0$, so daß sich ein Spline $s \in \hat{V}$ konstruieren läßt, der in (x_u, x_{u+m+h}) nur h einfache Nullstellen besitzt und wegen

$x_0 < x_{u+m+h}$ deshalb in T nicht identisch verschwindet. Dann ist aber für geeignetes $c \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$, $s_0 + cs \in V_{k,1}$ eine Funktion, die auf T die Funktion f mindestens genauso gut approximiert wie s_0 . Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung.

Schließlich sei eine Teilmenge $[x_j, x_k] \times \{\eta_{v_0}\}$, $j = 1, \dots, k-2$, von T gegeben, so daß $(f-s_0)(\eta_{v_0})$ nur $1 \leq k-j-1$ alternierende Extrempunkte in $[x_j, x_k]$ besitzt.

Wir betrachten das Intervall $[x_j, x_{k+m-2}]$. Analog zu den schon behandelten Fällen existiert ein Teilintervall $[x_u, x_{u+m+h}]$, $h \geq 0$, von $[x_j, x_{k+m-2}]$ und ein $s \in \tilde{V}$, so daß s in (x_u, x_{u+m+h}) nur h einfache Nullstellen besitzt und somit wegen $x_u < x_k$ in T nicht identisch verschwindet. Wegen

$$s(x, y) = \sum_{\mu=u}^{u+h+1} \sum_{\lambda=1-n}^{l-1} \alpha_{\mu\lambda} B_{n,\lambda}(y) B_{m,\mu}(x), \quad \alpha_{u+h+1, l-1} = 0$$

und $x_{u+m+h+1} \leq x_{k+m-1}$ ist $s \in V_{k,1}$ und wie in den vorherigen Fällen erhält man einen Widerspruch zur Voraussetzung.

Aus Satz 5.9 ergibt sich sofort

5.10 Folgerung:

Es sei s_0 die einzige Minimallösung für f bzgl $v_{k,1}$ auf T . Dann besitzt $f - s_0$ in jeder Teilmenge

$\bigcup_{v=v_0}^{v_1} [x_0, x_j] \times \{\eta_v\}$, $j = 1, \dots, k$, von T ein Alternantengitter mit $j \cdot (v_1 - v_0 + 1)$ Punkten und in jeder Teil-

menge $\bigcup_{v=v_0}^{v_1} [x_j, x_k] \times \{\eta_v\}$, $j = 1, \dots, k-2$, von T ein Alternantengitter mit $(k-j-1)(v_1 - v_0 + 1)$ Punkten.

Falls $k > m$ ist, besitzt $f - s_0$ in jeder Teilmenge

$\bigcup_{v=v_0}^{v_1} [x_1, x_{1+j+m-1}] \times \{\eta_v\}$, $j \geq 1$, von T ein Alternantengitter mit $j \cdot (v_1 - v_0 + 1)$ Punkten.

Literaturverzeichnis

- | 1 | R.B. BARRAR Spline Functions with Free Knots as
H.L. LOEB the Limits of Varisolvent Families
J. Approximation Theory 12 (1974)
- | 2 | R.C. BUCK Alternation Theorems for Functions
of Several Variables
J. Approximation Theory 1, 325 - 334
(1968)
- | 3 | E.W.CHENEY Introduction to Approximation Theory
Mc Graw-Hill New York 1966
- | 4 | H.B. CURRY On Pólya Frequency Functions IV:
I.J. SCHOENBERG The Fundamental Spline Functions and
Their Limits
J. d'Anal. Math. 18, 71 - 107
- | 5 | H. EHLICH Tschebyscheff-Approximation stetiger
W. HAUSSMANN Funktionen in 2 Veränderlichen
Math. Z. 117, 21 - 34 (1970)
- | 6 | H. EHLICH Čebyšev-Polynome in mehreren Ver-
K. ZELLER änderlichen
Math. Z. 93, 142 - 143 (1966)

- |13| L. SCHUMAKER Uniform Approximation by Tschebyscheffian
Spline Functions
Journal of Mathematics and Mechanics 18,
369 - 377 (1968)
- |14| L. SCHUMAKER Approximation by Splines in:
T.N.E. GREVILLE: Theory and Appli-
cations of Spline Functions
Academic Press New York 1969
- |15| H. STRAUSS Eindeutigkeit bei der gleichmäßigen
Approximation mit Tschebyscheffschen
Splinefunktionen:
Bericht 019 des Instituts für Ange-
wandte Mathematik der Universität
Erlangen-Nürnberg
Erscheint in J. Approximation Theory
- |16| H. STRAUSS L_1 -Approximation mit Splinefunktionen
Bericht 014 des Instituts für Ange-
wandte Mathematik der Universität
Erlangen-Nürnberg
Erscheint in ISNM 26,
Birkhäuser-Verlag Basel Stuttgart

|17| K. YOSIDA

Functional Analysis, 2. Auflage

Springer-Verlag Berlin Heidelberg

New York 1968

Lebenslauf

Ich wurde am 29. September 1946 als Sohn des kaufmännischen Abteilungsleiters Hans Sommer und seiner Ehefrau Hilde, geb. Hellmuth, in Nürnberg geboren.

Von 1952 bis 1956 besuchte ich die Volksschule und anschließend das Neue Gymnasium in Nürnberg. Im Juli 1965 legte ich an dieser Schule die Reifeprüfung ab.

Von Oktober 1965 bis September 1967 leistete ich den Grundwehrdienst bei der Bundeswehr ab. Im November 1967 begann ich mit dem Studium der Mathematik an der Universität Erlangen-Nürnberg. Im Juni 1970 bestand ich dort die Diplom-Vorprüfung und im Januar 1973 die Diplom-Hauptprüfung. Seit März 1973 bin ich als Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten am Institut für Angewandte Mathematik der Universität Erlangen-Nürnberg am Lehrstuhl von Prof. Dr. G. Meinardus tätig.

Copie - Center 2000
852 ERLANGEN · Obere Karlstr. 30